

# Prévision de l'indice d'affaiblissement acoustique : approche modale - Application aux parois orthotropes

Thomas Buzzi, Cécile Courmé, André Moulinier, Alain Tisseyre

TISSEYRE & ASSOCIES, [www.planete-acoustique.com](http://www.planete-acoustique.com)

## RESUME

Le calcul de l'indice d'affaiblissement acoustique en analyse modale est développé d'une manière générale, en mettant en évidence les différentes approches possibles. Ces calculs se décomposent en deux étapes : une étude vibratoire visant à déterminer le déplacement transversal de la plaque et une étude de son rayonnement. Les particularités rencontrées lors des calculs pour des plaques orthotropes sont présentées.

Cette étude a débouché sur la programmation d'un nouvel algorithme de calcul dans le logiciel P.I.A.A. TA version 7. Les hypothèses de départ sont données, ainsi que les résultats obtenus pour diverses parois. On a comparé les résultats en analyse modale à ceux obtenus par l'approche Cremer-Sewell.

## I. INTRODUCTION

La prévision de l'indice d'affaiblissement acoustique est primordiale dans le domaine de l'ingénierie acoustique du bâtiment. Ce problème physique a été abordé de diverses manières par le passé. Cremer [1] et Sewell [2] ont donné les expressions de l'indice d'affaiblissement acoustique des parois donnant des tendances générales dans un modèle de plaques infinies. Pour ce qui est de l'analyse modale, où l'on prend en compte les réflexions de bords, plusieurs approches sont possibles :

- en premier lieu la modélisation numérique, qui se fait par discrétisation des équations et maillage du système à étudier (f.e.m, b.e.m).

- dans l'approche plaques finies, la description peut être faite de manière analytique par la théorie modale. Lesueur [3], Maidanik [4], Wallace [11] ont développé des techniques de calculs ne faisant pas intervenir le couplage intermodal. Guyader, Berry, Nicolas [7], Pope, Leibowitz [5], Davies [10] ont proposé des calculs prenant en compte le couplage intermodal.

L'objectif de cet article est de présenter une vision générale des différentes approches de l'indice d'affaiblissement acoustique et leurs limites respectives. Nous présentons les différentes étapes du développement des calculs dans l'approche modale analytique. Les résultats de cette étude ont débouché sur une programmation informatique des équations dont nous présentons ci-après quelques exemples de résultats. Ces résultats sont comparés à l'approche Cremer-Sewell.

## II. APPROCHE THEORIQUE

### II.1. Géométrie considérée

On considère une plaque rectangulaire finie de longueur  $a$ , de largeur  $b$  et d'épaisseur  $h$ , bafflée par un écran

infini et rigide séparant deux milieux fluides semi-infinis, identiques, de masse volumique  $\rho_0$ .

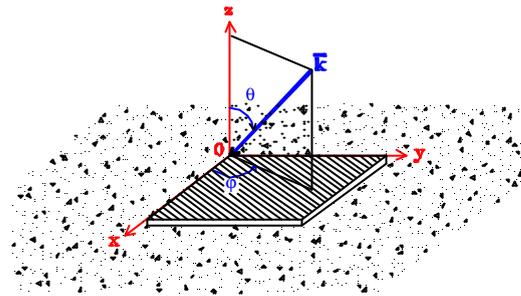


Figure 1. Géométrie du problème considéré

### II.2. Plaques orthotropes

Une plaque orthotrope possède des paramètres de rigidité différents selon deux axes perpendiculaires, ces axes étant dans notre problème parallèles aux bords de la plaque.

Il existe plusieurs types d'orthotropie :

- une orthotropie de géométrie où la géométrie de la plaque entraîne l'orthotropie à module d'Young constant,
- une orthotropie de matériau où la plaque possède deux modules d'Young différents selon les deux directions.

### II.3. Etude vibratoire

#### II.3.1 Equation du mouvement

L'étude de la transparence acoustique de la plaque passe par la connaissance de l'amplitude de ses déplacements en chaque point.

Afin de les déterminer, on établit l'équation du mouvement de la plaque en réalisant une étude énergétique, faisant intervenir les différentes énergies du système (énergie cinétique, énergie potentielle).

La méthode de Rayleigh-Ritz est utilisée pour développer le déplacement  $w$  de la plaque selon une base  $\mathbf{F}_m(x) \mathbf{F}_n(y)$  :

$$w(x, y, t) = \sum_m \sum_n a_{mn}(\mathbf{w}) \mathbf{f}_m(x) \mathbf{f}_n(y) e^{i\omega t} \quad (1)$$

où  $a_{mn}$  représente l'amplitude du mode  $(m, n)$ .

Deux bases sont généralement envisagées :

- une base sinusoidale

$$\mathbf{f}_m(x) \mathbf{f}_n(y) = \sin\left(\frac{m\mathbf{p}}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\mathbf{p}}{b} y\right) \quad (2)$$

- une base polynomiale

$$\mathbf{f}_m(x) \mathbf{f}_n(y) = \left(\frac{2}{a} x\right)^m \left(\frac{2}{b} y\right)^n \quad (3)$$

La résolution du problème en vibrations libres permet d'obtenir la pulsation propre de chaque mode ; la résolution en régime forcé conduit au calcul des amplitudes  $a_{mn}$  :

$$\{a_{pq}\} = \{f_{mn}\} [A_{mnpq}]^{-1} \quad (4)$$

où  $f_{mn}$  représente les forces excitatrices et  $A$  est la matrice d'impédance totale de la plaque [3].

Pour un fluide léger et dans le cas où le couplage intermodal est négligeable,  $A$  sera diagonale si la base est sinusoidale et pleine si la base est polynomiale.

### II.3.2 Particularités des parois orthotropes.

L'expression de l'énergie potentielle fait intervenir les déformations et les contraintes de ces parois.

La loi de Hooke relie les contraintes aux déformations par l'intermédiaire d'une matrice de rigidité dans le cadre des déformations élastiques. Nous étudions ici une plaque mince, pour laquelle les composantes des contraintes et des déformations suivant la direction  $Z$  sont prises comme nulles.

Dans le cas d'une plaque isotrope, la matrice de rigidité s'écrit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_{xx} \\ \mathbf{s}_{yy} \\ \mathbf{s}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & \frac{uE}{(1-u^2)} & 0 \\ \frac{uE}{(1-u^2)} & E & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{xx} \\ \mathbf{e}_{yy} \\ \mathbf{e}_{xy} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Dans le cas d'un plaque orthotrope, la matrice de rigidité s'écrit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_{xx} \\ \mathbf{s}_{yy} \\ \mathbf{s}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x & \frac{u_{xy} E_y}{(1-u_{xy} u_{yx})} & 0 \\ \frac{u_{yx} E_x}{(1-u_{xy} u_{yx})} & E_y & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{xx} \\ \mathbf{e}_{yy} \\ \mathbf{e}_{xy} \end{bmatrix} \quad (6)$$

## II.4. Etude du rayonnement

### II.4.1 Pression pariétale

Pour caractériser l'indice d'affaiblissement acoustique, il est nécessaire de connaître non seulement le déplacement transverse de la plaque, mais aussi son rayonnement. La pression pariétale doit vérifier les équations de Helmholtz.

On développe cette pression sous la forme suivante

$$p_2(x, y, 0) = \sum_{m,n} \sum_{r,s} j\omega a_{mn}(\mathbf{w}) Z_{mnr}^{(2)}(\mathbf{w}) w_{rs}(x, y) \quad (7)$$

Cette expression fait intervenir l'amplitude du déplacement de la plaque  $a_{mn}$  et l'impédance intermodale de rayonnement en  $Z_{mnpq}$ .

### II.4.2 Impédance intermodale de rayonnement

L'impédance intermodale de rayonnement  $Z_{mnpq}$  est le rapport d'une pression sur une vitesse et représente les effets que le fluide exerce sur la structure. Elle peut se mettre sous forme matricielle, les termes diagonaux caractérisant l'action directe du rayonnement d'un mode et les termes non diagonaux le couplage par rayonnement entre deux modes.

Cette impédance est une grandeur complexe. En présence d'un fluide léger (en regard de la masse de la plaque), on peut ne prendre en compte que sa partie réelle. Maidanik [4] donne les expressions de cette matrice dans le cas d'un fluide léger et sans couplage intermodal en base sinusoidale. Pope [5] donne l'expression de ces mêmes termes dans le cas d'un couplage intermodal. Dans le cas d'une base polynomiale on peut les trouver dans les travaux de Berry, Guyader, Nicolas[6][7].

### II.5 Transparence acoustique d'une plaque finie

L'indice d'affaiblissement acoustique est déduit de l'expression suivante de la transparence acoustique :

$$\mathbf{t}(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{p}_{ray}}{\mathbf{p}_{inc}} \quad (8)$$

où  $\mathbf{p}_{ray}$  est la puissance transmise par la paroi et  $\mathbf{p}_{inc}$  la puissance incidente.

Dans l'expression de la puissance rayonnée :

$$\mathbf{p}_{ray} = \frac{1}{2} \Re \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y, 0) [j\omega w(x, y)]^* dx dy \right\} \quad (9)$$

On remplace  $p_2(x, y, 0)$  et  $w(x, y)$  par les expressions calculées précédemment. Tous calculs faits, la transparence pour une onde plane incidente est :

$$\mathbf{t}(\mathbf{w}, \mathbf{q}, \mathbf{j}) = \frac{\mathbf{r} \mathbf{w}^2}{\cos \mathbf{q} S} \sum_{m,n} \sum_{k,l} \Re \{ a_{mn}(\mathbf{w}) Z_{mnl}^{(2)} a_{kl}^*(\mathbf{w}) \} \quad (10)$$

L'intégration sur les angles  $\theta$  et  $\phi$  conduit à l'expression en champ diffus :

$$\mathbf{t}_d = \frac{16\mathbf{p} c^2}{S} \sum_{m,n} \sum_{k,l} \sum_{r,s} \sum_{i,j} \Re \{ Z_{mnr}^{(2)} A_{rsmn}^{-1} A_{ijkl}^{-1} R_{rsij}^{(1)} \} \quad (11)$$

Dans le cas d'un fluide léger et d'une base sinusoidale, on obtient la formule simplifiée ci-dessous

$$\mathbf{t}_d = \frac{16\mathbf{p} c^2}{S} \sum_m \sum_n \frac{R_{mmmm}^2}{|A_{mmmm}|^2} \quad (12)$$

### III. Application et résultats

La prévision de l'indice d'affaiblissement acoustique basée sur la formulation de Cremer et Sewell pour le comportement en basse fréquence a été la base de l'écriture des logiciels PIAA de CAGT et STIFF, logiciel issu de PIAA CAGT.

L'étude des différentes approches exposée ci-dessus ainsi que la configuration des hypothèses de départ ont permis d'aboutir à la programmation informatique du logiciel PIAA modal V7. La théorie modale a été utilisée pour simuler le comportement acoustique des parois orthotropes, mais s'applique également à de nombreux autres types de parois comme par exemple les parois simples isotropes, les parois multicouches ou les parois doubles.

#### III.1 Hypothèses de calcul du logiciel PIAA TA modal V7

Ce logiciel procède par développement du déplacement transversal selon une base sinusoïdale. De ce fait, nous comparerons des parois possédant des conditions aux limites de plaques simplement posées sur leurs bords. Ceci conduit à une matrice A diagonale.

Le fluide dans lequel la plaque est immergée est supposé léger (l'air) et nous prenons comme hypothèse que le couplage intermodal est négligeable. La matrice d'impédance intermodale de rayonnement est donc réelle et diagonale.

Dans le cas d'une paroi orthotrope, une méthode de plaque équivalente en raideurs a été utilisée. Il s'agit de calculer les modules d'Young d'une plaque mince, permettant d'obtenir des rigidités équivalentes à celles de la plaque d'origine. Ces modules d'Young sont fonction du module d'Young et des caractéristiques géométriques de la plaque d'origine.

#### III.2 Exemples de parois

Nous avons procédé, à partir de notre banque de données expérimentales, à plusieurs dizaines de calculs comparatifs entre les approches Cremer-Sewell et modale. Nous présentons ici un échantillon représentatif des écarts significatifs.

Nous présentons donc la comparaison pour les 4 parois suivantes :

- Vitrage simple épaisseur 6 mm,
- Vitrage feuilleté acoustique 8-15-8 (résine acoustique type feuilleté de St Gobain).
- Plaque d'acier type bardage 70/100<sup>ème</sup>,
- Cloison à base de plaque d'acier avec poteaux, type cloison Synchron de Clestra Hauserman.

##### 1. Vitrage simple de 6 mm

En basse fréquence, seule la formulation modale fournit une bonne superposition avec les valeurs expérimentales (PV). La formulation de Cremer-Sewell est inférieure aux valeurs expérimentales.

Aux fréquences proches de la fréquence critique, la formulation de Cremer-Sewell dépasse fortement les valeurs expérimentales. Nous allons retrouver ce comportement dans l'exemple suivant (vitrage feuilleté acoustique).

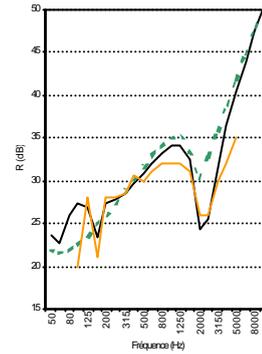


Figure 2. Vitrage 6mm, — théorie modale, — théorie Cremer-Sewell, — PV

##### 2. Vitrage feuilleté résine acoustique

Le comportement en basse fréquence est quasi similaire dans les deux modélisations au procès-verbal d'essai. Par contre, seule la théorie modale permet d'obtenir une bonne concordance de la prévision de l'indice d'affaiblissement acoustique à partir de l'octave 1000 Hz. La formulation Cremer-Sewell sous-estime d'environ 7 à 8 dB l'indice d'affaiblissement acoustique ainsi obtenu.

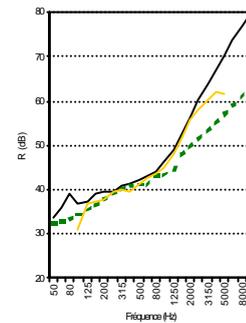


Figure 3. Vitrage feuilleté 8-15-8, — théorie modale, — théorie Cremer-Sewell, — PV

##### 3. Bardage

Nous pouvons constater une identité de l'indice d'affaiblissement acoustique calculé en théorie modale avec le comportement en basse fréquence mesuré en laboratoire d'essai. La formulation de Cremer-Sewell surestime de 5 dB l'indice d'affaiblissement acoustique.

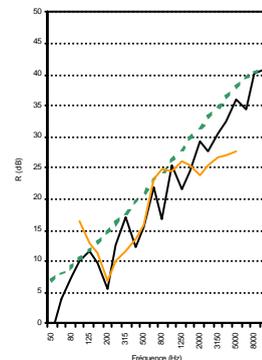


Figure 4. Bardage 7/10ème, — théorie modale, — théorie Cremer-Sewell, — PV

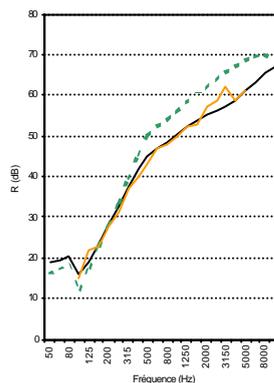
#### 4. *Paroi Synchronne Clestra-Hauseman*

La formulation modale se superpose bien avec le PV d'essai.

Avec les mêmes hypothèses de liaisonnement entre parements dans les deux calculs, la formulation Cremer-Sewell dépasse de 5 à 10 dB la valeur du PV dans les médiums et les aigus.

On constate une bonne adéquation du comportement en basse fréquence de la paroi double en acier ainsi que la prise en compte des fréquences critiques multiples dues aux raideurs apportées par les poteaux de la cloison.

La formulation Cremer-Sewell sous-estime la performance en basse fréquence et la surestime dans les médiums et les aigus.



**Figure 5.** *Paroi Synchronne*, —théorie modale, —théorie Cremer-Sewell, — PV

#### IV. CONCLUSION

Les résultats présentés montrent une très bonne concordance pour ces différentes configurations de parois.

La comparaison des résultats obtenus sur des parois simples, multiples et orthotropes, permet de constater une forte amélioration de la prévision de l'indice d'affaiblissement acoustique des parois ainsi modélisées par l'approche modale.

Il est envisagé de passer à une programmation basée sur le développement du déplacement transversal sur une base polynomiale ; son écriture informatique est en cours de débogage.

Les calculs seront comparés aux données expérimentales de notre banque de données comportant 2500 procès-verbaux d'essai de parois testées en laboratoire d'essai. Ceci fera l'objet d'une publication ultérieure.

Il sera alors possible d'observer l'influence des conditions aux limites ainsi que celle du couplage intermodal. Le calcul de l'indice d'affaiblissement acoustique des parois raidies par des montants pourra également être réalisé d'une manière plus fine.

#### RÉFÉRENCES

1. L. Cremer, Theorie der Schalldämmung dünner Wände bei schrägem Einfall. Akust. Z. 7 81-104 (1942).
2. E.C. Sewell, *Transmission of reverberant sound through a single-leaf partition surrounded by an infinite rigid baffle*, J.Sound Vib. (1970).
3. C. Lesueur, *Rayonnement acoustique des structures*, Editions Eyrolles (1998).
4. G. Maidanik, *Response of ribbed panels to reverberant acoustic fields*, J. Acoust. Soc. Am. **34**, 809-826 (1962).
5. D. Pope, R.C. Leibowitz, *Intermodal coupling coefficients for a fluid-loaded*, J. Acoust. Soc. Am. **56**, 408-415 (1974).
6. A. Berry, *A new formulation for the vibration and sound radiation of fluid-loaded plates with elastic boundary conditions*, J. Acoust. Soc. Am. **96**, 889-901 (1994).
7. A. Berry, J.L. Guyader, J. Nicolas, *A general formulation for the sound radiation from rectangular, baffled plates with arbitrary boundary conditions*, J. Acoust. Soc. Am. **88**, 2792-2802 (1990).
8. R. Woodcock, J. Nicolas, *A generalized model for predicting the sound transmission properties of generally orthotropic plates with arbitrary boundary conditions*, J. Acoust. Soc. Am. **97**, 1099-1112 (1995).
9. P. Cordonnier-Cloarec, *Contribution à l'étude du rayonnement acoustique de parois métalliques nervurées*, Thèse Université Paul Sabatier, Toulouse (1989).
10. H. G. Davies, *Acoustic radiation from fluid loaded rectangular plates*, MIT Acoustics and Vibration Laboratory report nr.71476-1 (1969).
11. C. E. Wallace, *Radiation resistance of a rectangular panel*, J. Acoust. Soc. Am. **51**, 946-952 (1972).