



COMPTEZ SUR DES EXPERTS

Analyse dynamique de structures

Pourquoi faire ? Quels enjeux ?

Animateur : Henri CAMPAGNA

dB Vib GROUPE

Le groupe est composé de trois sociétés

indépendantes et complémentaires



L'expertise dynamique

Prestations de service, expertise, essais, maintenance et formation



Ingénierie au service des industriels

Ingénierie bruit et traitement d'air



Solutions de mesures

*Vente et location d'instruments innovants
pour la maintenance et R&D*

Analyse modale de structures : approches expérimentales et numériques



1. Les domaines d'application de l'analyse modale:

Une compréhension détaillée de la dynamique des structures est essentielle pour la conception, le développement de nouvelles structures et la résolution des problèmes de bruit et de vibration sur des structures existantes (machines tournantes, conduites ,etc.....)

Cette compréhension passe par l'étude de l'analyse modale expérimentale ou théorique, outil efficace qui permet de décrire, comprendre et modéliser le comportement dynamique des structures.



1. Les domaines d'application de l'analyse modale:

Qui est responsable des niveaux de bruit ou de vibration au-dessus des limites spécifiées?

Dans tous les cas, trois facteurs sont prédominants:

- La source, où sont générées les forces dynamiques
- Le chemin de propagation qui transmet l'énergie
- Le récepteur et sa limite acceptable de bruit et de vibrations.

La clé du problème réside dans l'un de ces facteurs qui peuvent être étudiés de façon à trouver la solution optimale.



1. Les domaines d'application de l'analyse modale:

Exemple 1. considérons un pompiste qui monte sur un châssis un groupe moto-réducteur- pompes.

Il reçoit de la part de ses fournisseurs le moteur et le réducteur, qui sont générateurs de sources vibratoires et acoustiques à des fréquences excitatrices différentes de celles générées par la pompe.

Si une de ces fréquences (moteur ou réducteur) entre en résonance avec la structure du châssis on peut se demander qui du pompiste ou du fournisseur est responsable?

1. Les domaines d'application de l'analyse modale:

Exemple 2. considérons un essai de fatigue réalisé avec un excitateur électrodynamique.

L'objet à tester dans une bande passante donnée ,est monté sur la table de l'excitateur avec une pièce de liaison qui doit être inerte dans la bande passante considérée.

C'est-à-dire ne pas présenter de fréquences de résonances .
Comment faire?



1. Les domaines d'application de l'analyse modale:

Exemple 3. considérons une éolienne qui rentre en résonance avec l'excitation du balourd ou de la fréquence de passage des pales que faire?

Exemple 4. considérons une ligne d'arbre d'une turbine a gaz ou a vapeur comment s'assurer qu'elle ne présente pas de fréquences critiques?

Exemple 5. comment réduire le bruit d'un alternateur lors du démarrage d'un véhicule?

On pourrait multiplier ces exemples à l'infini car toute structure présente des caractéristiques dynamiques qui lui sont propres.

2. analyse du signal et analyse de systèmes

l'analyse du signal

donne la réponse d'un système à une excitation généralement inconnue, ainsi que la possibilité d'interpréter facilement cette réponse

Détermine et décrit la réponse réelle due aux forces opérationnelles qui ne sont pas mesurables

Exemples

Niveau de bruit et de vibration

Mode de flexion opérationnel

Intensité acoustique

Analyse de la réponse d'une conduite

L'analyse modale opérationnelle.

l'analyse de systèmes

donne les propriétés inhérentes à un système. L'analyse est réalisée en excitant le système avec des forces mesurables et en étudiant le rapport réponse /force.

Pour des systèmes linéaires, ce rapport est propre au système et reste le même que la structure soit excitée ou au repos. Détermine les propriétés inhérentes au système et permet d'obtenir un modèle dynamique.

Exemples

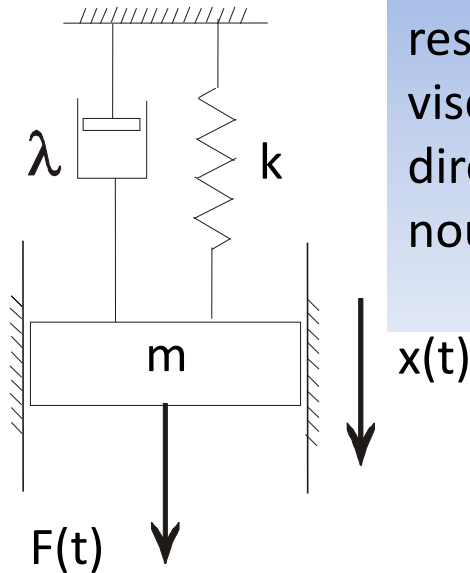
Mesures de mobilités

Analyse modale

Détermination du module d'élasticité d'un matériau

3. Les fondamentaux du comportement dynamique de structure simple

Système à un degré de liberté (1ddl) ou SDOF



Considérons une masse **indéformable** (m) suspendue par un ressort de rappel de raideur (k) et par un amortisseur de type visqueux (λ), l'ensemble ne pouvant se mouvoir que dans la direction X. l'application de la loi fondamentale de la dynamique nous conduit à l'équation différentielle suivante:

$$m\ddot{x}(t) + \lambda\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

$$2h = \frac{\lambda}{m} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

On note :

m : masse du solide (en kg)

k : raideur du ressort (en N / m)

λ : facteur d'amortissement (en kg / s)

$F(t)$: force appliquée au solide (en N)

$x(t)$: déplacement du solide (en m).

3 Les fondamentaux du comportement dynamique de structure simple

Réponse dans le domaine temporel: essai de lacher

Vibrations libres : On éloigne la masse de sa position d'équilibre et on la lâche, sans vitesse initiale. L'équation du mouvement devient une équation

sans second membre

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

La solution est du type $x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec r_1 et r_2 les racines de l'équation

caractéristique $r^2 + 2hr + \omega_0^2 = 0$ $\Delta = 4(h^2 - \omega_0^2) = (\lambda^2 - 4km) \frac{1}{m^2}$ (avec $\frac{1}{m^2} \neq 0$)

• $\Delta = 0$: Pas de vibration: amortissement critique, valeur de l'amortissement au-delà de laquelle on ne peut avoir de vibration ($\Leftrightarrow h = \omega_0 \Leftrightarrow \lambda = \lambda_c = 2\sqrt{km}$)

$$\lambda = \lambda_c = 2\sqrt{km} = 2m\omega_0$$

On introduit le coefficient d'amortissement

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{\lambda_c} = \frac{\lambda}{2m\omega_0} = \frac{h}{\omega_0} = 1$$

3. Les fondamentaux du comportement dynamique de structure simple

$\Delta > 0$: Pas de vibration $\left(\Leftrightarrow h > \omega_0 \Leftrightarrow \lambda > 2\sqrt{km} \right) \Rightarrow \varepsilon > 1$ ($r_{1,2}$ sont toujours négatifs)

$\Delta < 0$: vibrations amorties $\left(\Leftrightarrow h < \omega_0 \Leftrightarrow \lambda < 2\sqrt{km} \right) \Rightarrow \varepsilon < 1$ $\Delta = 4j^2(\omega_0^2 - h^2)$

$r_{1,2} = -h \pm j\sqrt{\omega_0^2 - h^2} = -\varepsilon\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\varepsilon^2} = -\varepsilon\omega_0 \pm j\Omega_0$ ($r_{1,2}$ pôles complexes conjugués)

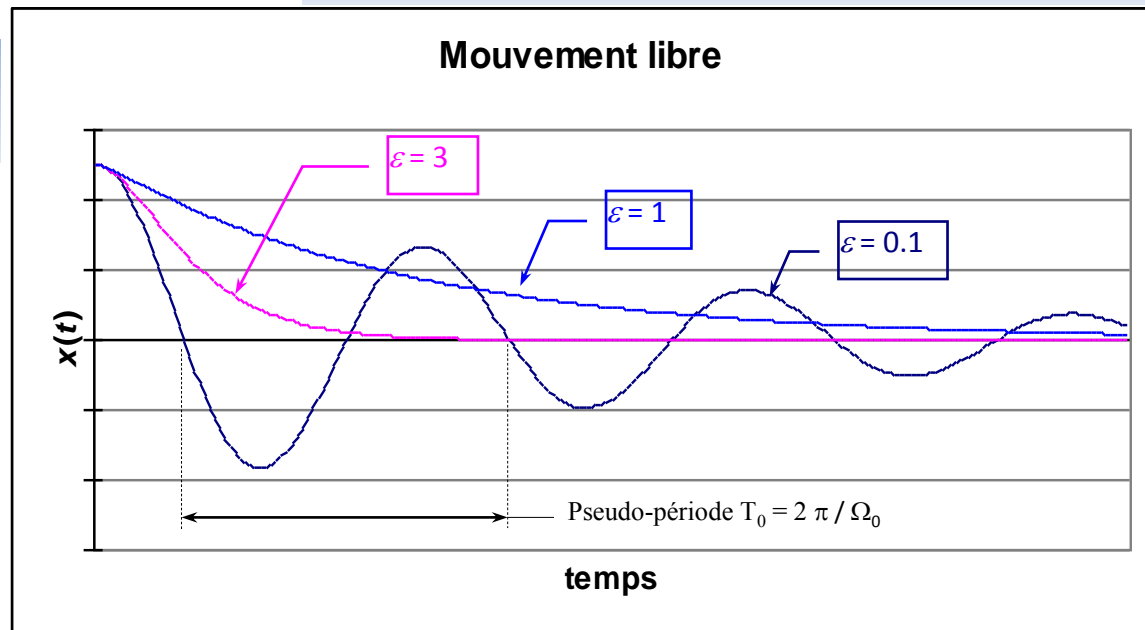
ω_0 pulsation propre de la structure conservative associée

$$\Omega_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

pulsation de la structure amortie (ou pseudo-pulsation)

$$x(t) = e^{-\varepsilon\omega_0 t} \left(X_{01} e^{-j\Omega_0 t} + X_{02} e^{+j\Omega_0 t} \right)$$

$$x(t) = X_0 e^{-\varepsilon\omega_0 t} \sin(\Omega_0 t + \phi)$$

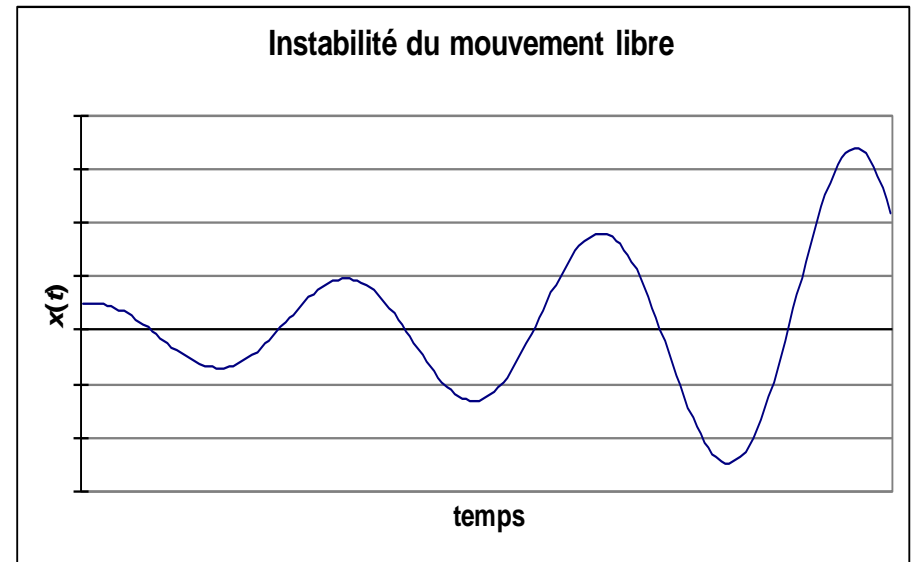
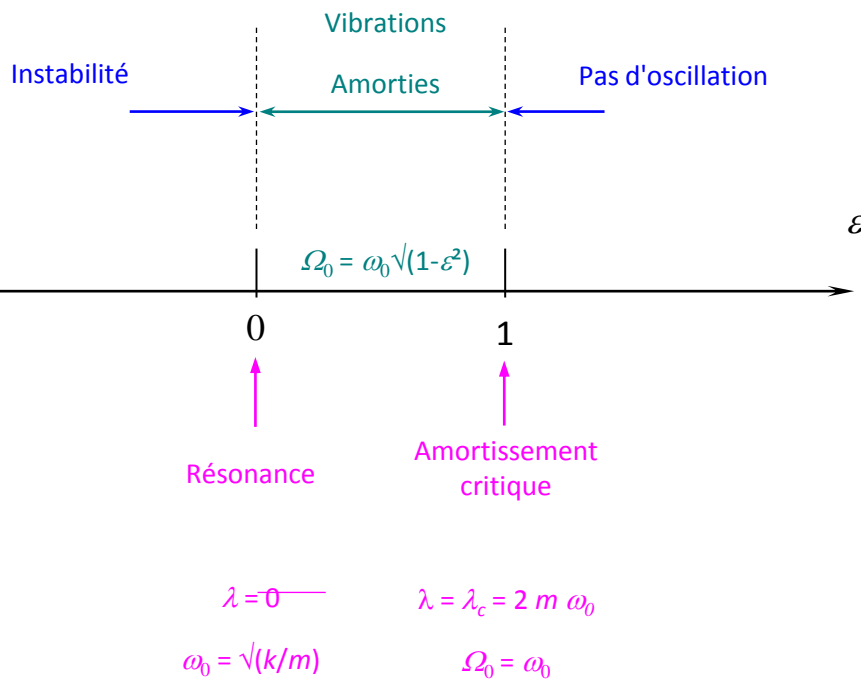


X_{01} , X_{02} , X_0 et ϕ sont déterminés par les conditions initiales [$x(t=0)$ et $x'(t=0)$]

3. Les fondamentaux du comportement dynamique de structure simple

•Vibrations libres : notion d'instabilité

Si le coefficient d'amortissement ε est négatif ($\varepsilon\omega_0 < 0$), l'évolution du déplacement $x(t)$ tend vers l'infini (figure ci-dessous) : on définit ainsi l'instabilité.



3. Les fondamentaux du comportement dynamique de structure simple

Réponse dans le domaine fréquentiel

En reprenant l'équation et en écrivant $F(t)$ sous la forme $F_0 e^{j\omega t}$

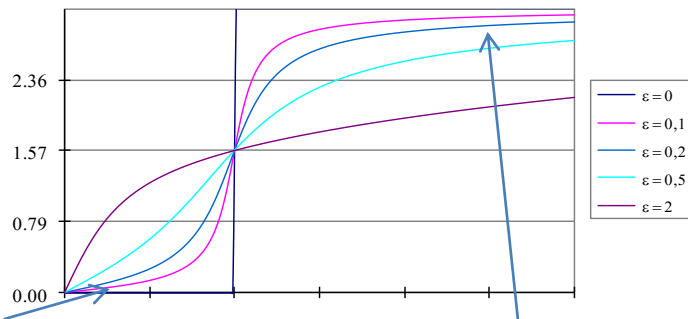
$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F_0 e^{j\omega t}$$

Solution permanente : on recherche $x(t)$ sous la forme : $x(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)}$

$$x(t) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\varepsilon\omega\omega_0} e^{j\omega t} = \text{Re}(x) + j\text{Im}(x)$$

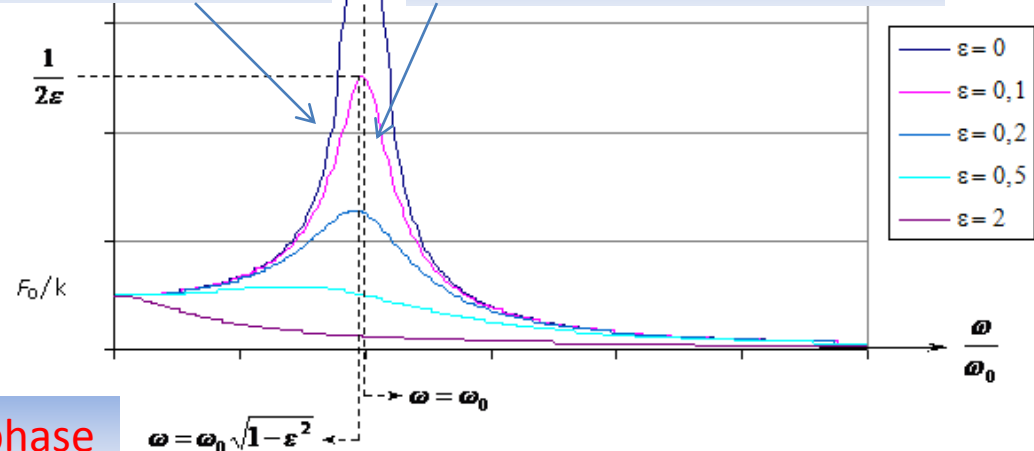
$$A = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \times \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\varepsilon^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} = \frac{F_0}{k} \times a$$

À la résonance l'amplitude du déplacement est régit par l'amortissement



Comportement élastique

Comportement massique

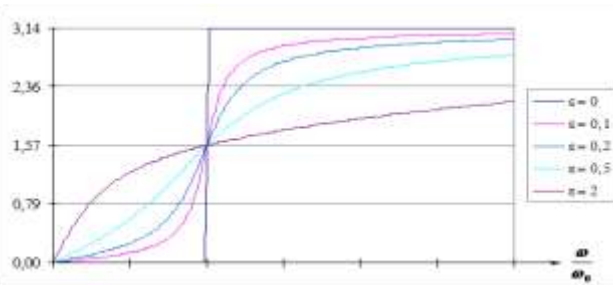
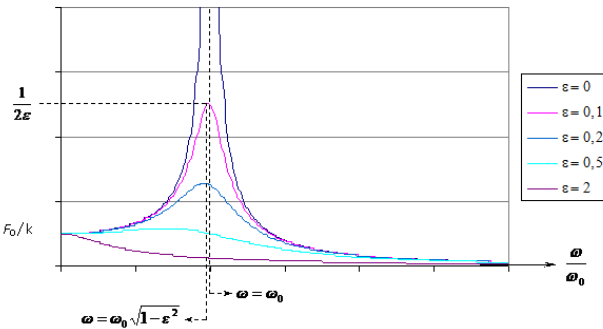


F/X En phase

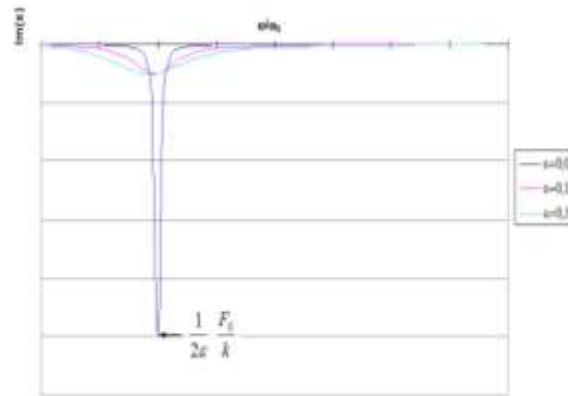
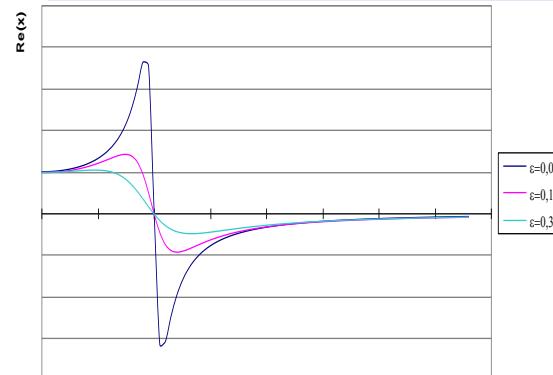
En opposition de phase

3. Les fondamentaux du comportement dynamique de structure simple

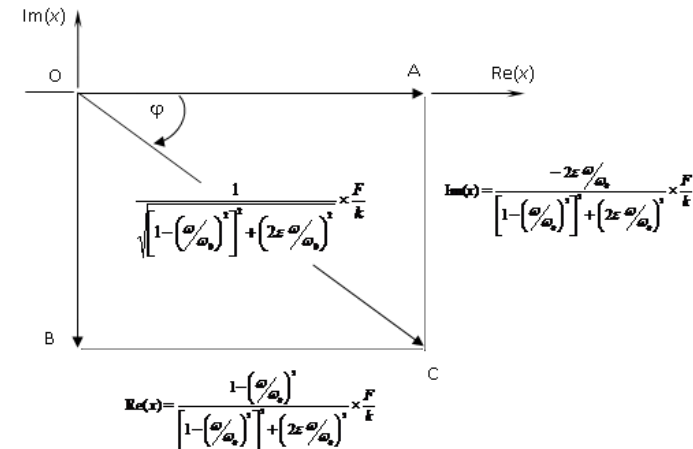
bode



Partie réelle et imaginaire



Nyquist



$$Re(x) = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(2\varepsilon \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \times \frac{F_0}{k}$$

$$Im(x) = \frac{-2\varepsilon \frac{\omega}{\omega_0}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(2\varepsilon \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \times \frac{F_0}{k}$$

Différents modes de représentation

3. Les fondamentaux du comportement dynamique de structure simple

Amortissement et facteur de surtension

Coefficient d'amortissement critique $\varepsilon = \frac{\lambda}{\lambda_c} = \frac{\lambda}{2m\omega_0}$

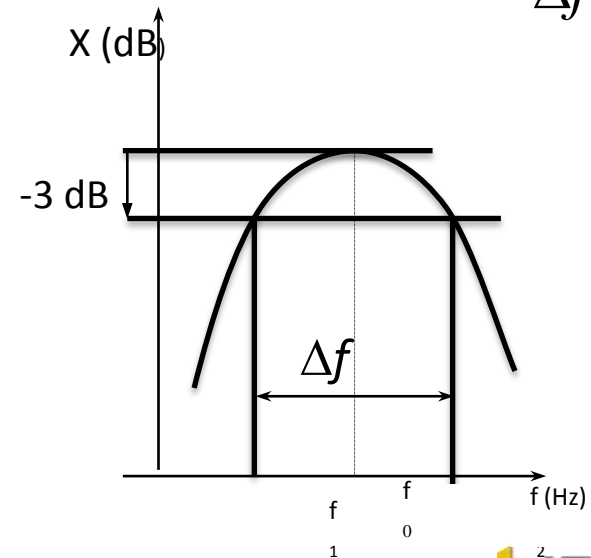
Coefficient de surtension (définition)

Ces formules permettent d'évaluer le coefficient de surtension Q_r et l'amortissement ε par la mesure de la bande passante à -3 dB. Cela suppose que les modes soient d'une part découplés et d'autre part peu amortis. (de l'ordre de 2 à 3%)

Cette formulation peut s'appliquer quelle que soit la fréquence de résonance. Elle est très utile pour un système à n degrés de liberté car applicable pour chacun d'eux.

$$Q_r = \frac{X(\omega = \omega_0)}{X(\omega = 0)} = \frac{\omega_0 m}{\lambda} = \frac{1}{2\varepsilon}$$

on montre $Q_r = \frac{f_o}{\Delta f} = \frac{1}{2\varepsilon}$



3.1 Les fondamentaux du comportement dynamique de structure à n degrés de Liberté (schéma modale)

Le système à un seul degré de liberté constitue le modèle de base, de nombreux phénomènes vibratoires.

Il permet de saisir la notion de résonance

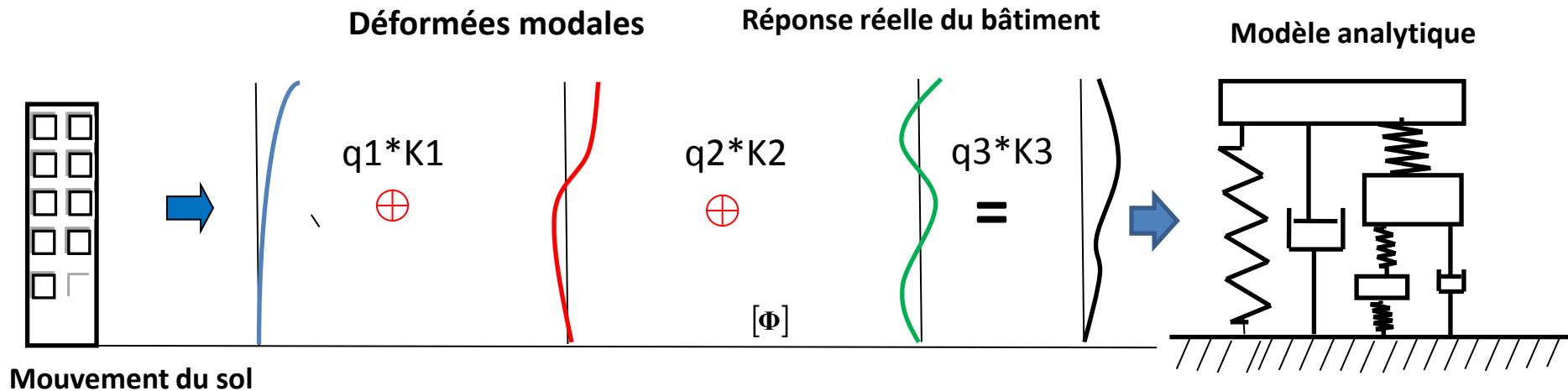
Pour un système non amorti, la réponse à une excitation à la fréquence de résonance ω_0 , se traduit par une amplitude “infinie” du déplacement.

Pour un amortissement visqueux, le maximum d’amplitude est obtenu à la pseudo-pulsation Ω , toujours inférieure à ω

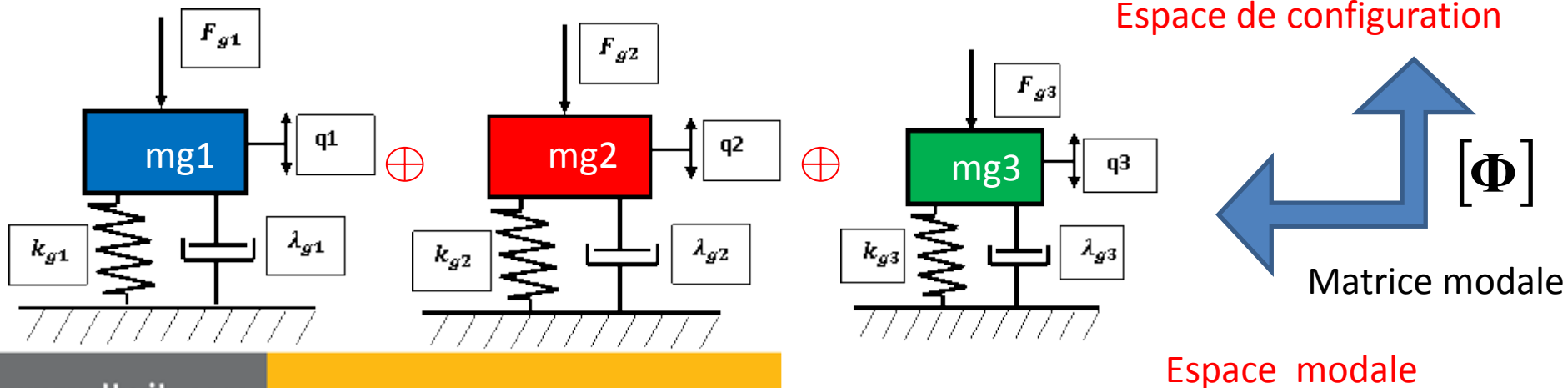
Pour visualiser la réponse de la structure, plusieurs modes de représentation sont à notre disposition : Diagrammes de bode, Nyquist, parties réelles et imaginaires

Le système à 1 ddl sert également à la compréhension de l'isolation vibratoire.

3.1 Les fondamentaux du comportement dynamique de structure à n degrés de Liberté (schéma modale)

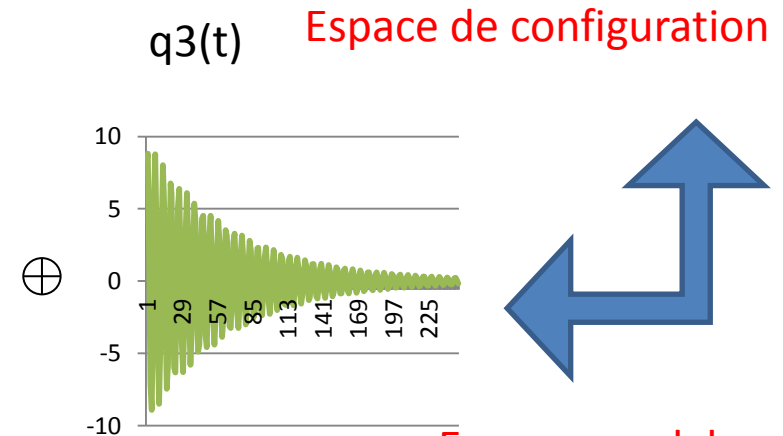
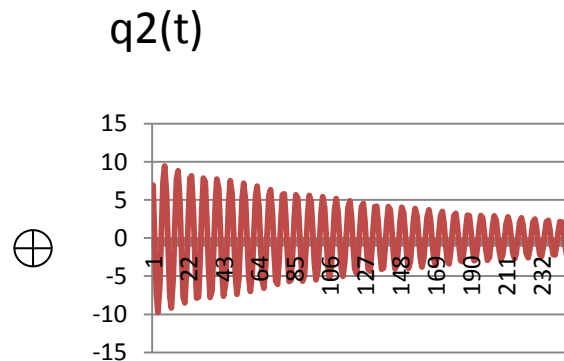
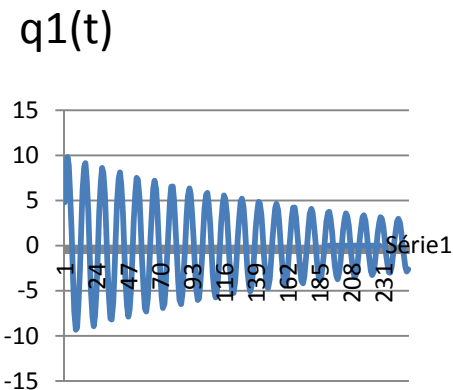
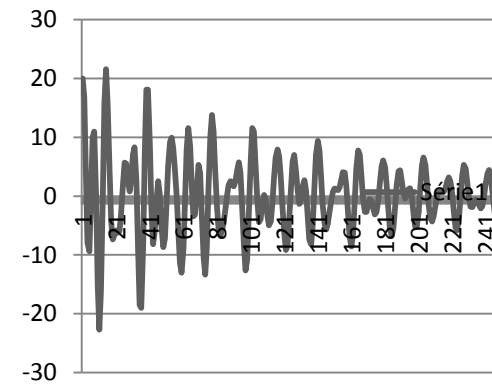
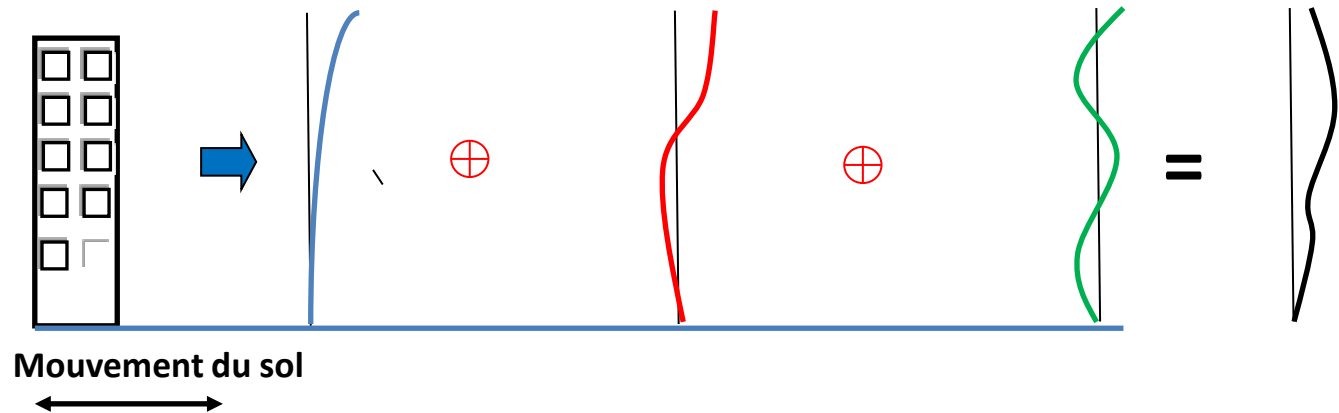


$K1, K2, K3$ étant des coefficients qui proviennent de la base modale

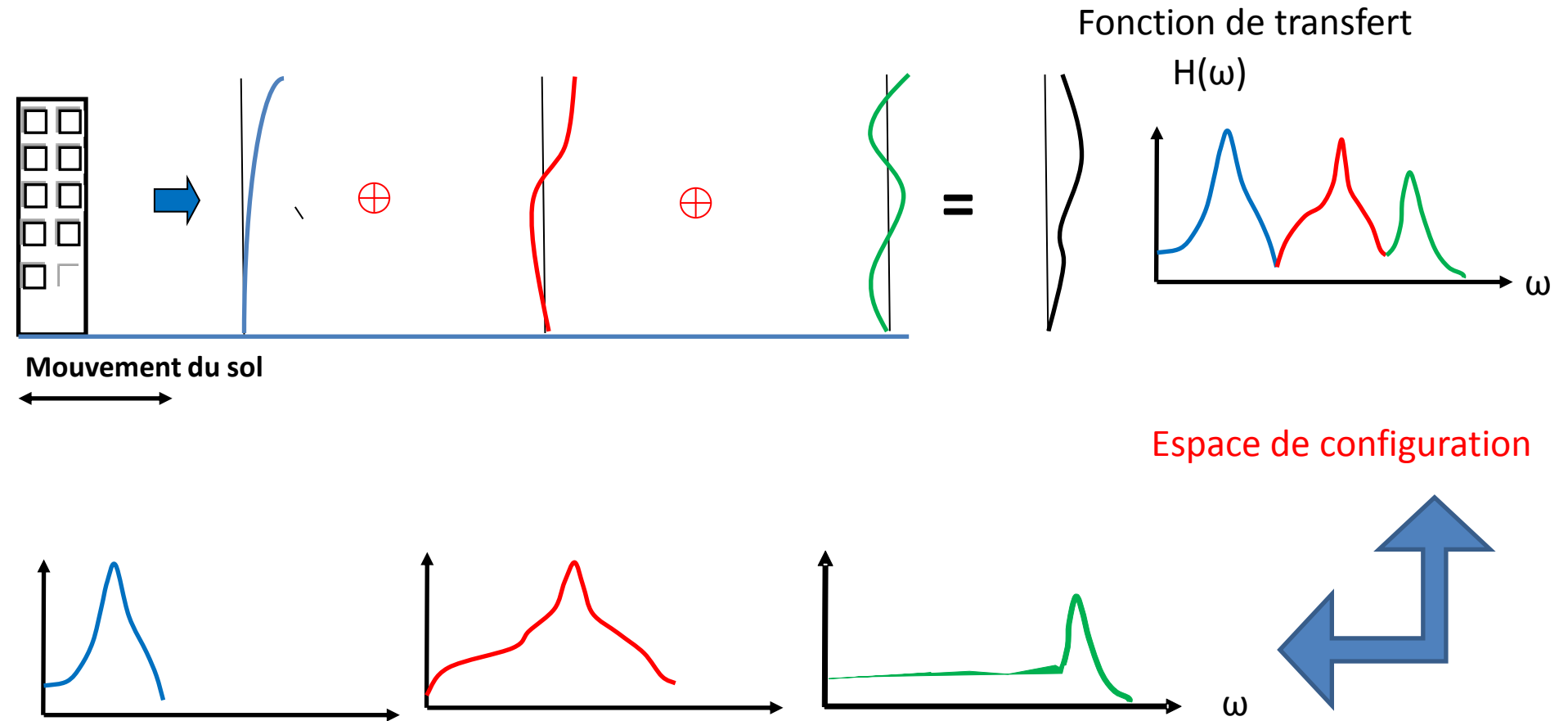


Espace modale

3.1 Les fondamentaux du comportement dynamique de structure à n degrés de Liberté (schéma modale)



3.1 Les fondamentaux du comportement dynamique de structure à n degrés de Liberté (schéma modale)



3.1 Les fondamentaux du comportement dynamique de structure à n degrés de Liberté (schéma modale)

Considérons une structure continue, discrétisée en n degrés de liberté dont les variables de position naturelles sont $\{x(t)\}^T = \{x_1, x_2, \dots, x_n, t\}$

L'équation du mouvement s'écrit $[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\}$

Pulsations et modes propres

Considérons la **Structure Conservative Associée** (\Rightarrow système **non amorti**), afin de calculer les fréquences et modes propres du système. $[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$
En posant $\{x(t)\} = \{\phi\} e^{j\omega t}$, on arrive à $\Rightarrow \left[[N] - \omega^2 [I] \right] \{\phi\} = \{0\}$ (avec $[N] = [M]^{-1}[K]$)

On élimine la solution obsolète $\{\phi\} = 0$. Le problème revient donc à chercher les valeurs propres de la **matrice dynamique** $[M]^{-1}[K]$.

3.1 Les fondamentaux du comportement dynamique de structure à n degrés de Liberté (schéma modale)

Pulsations et modes propres

Soit $\det \left| [M]^{-1} [K] - \lambda [I] \right| = 0$ (avec $\lambda = \omega^2$)

En développant , on aboutit à l'**équation caractéristique** du système :

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

(avec $n = \text{nombre de ddl}$) Les racines de l'équation sont appelées **valeurs propres** et les pulsations propres du système conservatif sont déduites de la relation :

$$\lambda_i = \omega_i^2$$

3.1 Les fondamentaux du comportement dynamique de structure à n degrés de Liberté (schéma modale)

Pulsations et modes propres

Pour chaque valeur propre, lui correspond un vecteur propre (ou forme propre)

$$\text{La solution de : } \left[[N] - \omega_i^2 [I] \right] \{\varphi_i\} = \{0\}$$

$\{\varphi_i\}$ est la **déformée propre de la structure** à la pulsation ω_i

On regroupe ensuite les vecteurs propres dans une seule matrice appelée matrice modale

$$[\Phi] = \left[\{\varphi_1\}; \{\varphi_2\}; \cdots; \{\varphi_n\} \right]$$

Les vecteurs propres de la base modale sont linéairement indépendants.

Cette indépendance permet une normalisation des vecteurs (dans le but de faire ressortir l'influence ou la prépondérance d'un paramètre).

3.1 Les fondamentaux du comportement dynamique de structure à n degrés de Liberté (schéma modale)

Orthogonalité des vecteurs propres

On montre que $\{\varphi_r\}^T [M] \{\varphi_s\} = 0$ $\{\varphi_r\}^T [K] \{\varphi_s\} = 0$

Les modes sont orthogonaux

on définit : $m_{gr} = \{\varphi_r\}^T [M] \{\varphi_r\}$

La masse généralisée

$$k_{gr} = \{\varphi_r\}^T [K] \{\varphi_r\}$$

La raideur généralisée

Il suit
$$\omega_r^2 = \frac{\{\varphi_r\}^T [K] \{\varphi_r\}}{\{\varphi_r\}^T [M] \{\varphi_r\}} = \frac{k_{gr}}{m_{gr}}$$

(On retrouve la solution trouvée pour un système à 1 ddl)

3.1 Les fondamentaux du comportement dynamique de structure à n degrés de Liberté (schéma modale)

- Norme

Les vecteurs propres φ_i sont définis à un coefficient près. Pour que l'amplitude des éléments des différents modes soit unique, on norme généralement les vecteurs propres .

Normalisation par rapport à $[M]$:

On rend unitaire les masses généralisées :

$$m_i = \{\varphi_i\}^T [M] \{\varphi_i\} = 1$$

Norme Euclidienne :

$$\{\varphi_i\} = \begin{Bmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{Bmatrix}$$

La norme euclidienne consiste à rendre unitaire le module du vecteur propre $\{\varphi_i\}$

$$x_{1i}^2 + x_{2i}^2 + \cdots + x_{ni}^2 = 1$$

3.1 Les fondamentaux du comportement dynamique de structure à n degrés de Liberté (schéma modale)

Expression du mouvement libre dans la base modale

Les équations du système sont couplées dans l'espace de configuration, c'est à dire que toutes les coordonnées x_i sont présentes dans toutes les équations.

Le couplage est dû à la matrice $[K]$. Cette dernière est, dans notre cas, symétrique (et non diagonale).

Ce type de couplage est appelé **couplage statique** (ou **élastique** ou encore **de position**).

La résolution du système n'est donc, pas aisée. On surmonte ce problème en projetant le système dans la base modale; en posant

$$\{x\} = [\Phi]\{q\}$$

3.1 Les fondamentaux du comportement dynamique de structure à n degrés de Liberté (schéma modale)

Expression du mouvement libre dans la base modale

Nous avons vu que les produits $\{\varphi_r\}^T [M] \{\varphi_s\} = 0$ $\{\varphi_r\}^T [K] \{\varphi_s\} = 0$

diagonalisent les deux matrices $[M]$ et $[K]$

$$\begin{bmatrix} m_{g1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & m_{gi} & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & m_{gn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_i \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{g1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & k_{gi} & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & k_{gn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\left(\begin{array}{l} \mathbf{m}_g \text{ masse généralisée} \\ \mathbf{k}_g \text{ raideur généralisée} \end{array} \right)$

Soit, sous forme simplifiée

$$\begin{bmatrix} \backslash & 0 \\ & M_g \\ 0 & \backslash \end{bmatrix} \{\ddot{q}\} + \begin{bmatrix} \backslash & 0 \\ & K_g \\ 0 & \backslash \end{bmatrix} \{q\} = \{0\}$$

Soit pour le mode i :

$$m_{gi} \ddot{q}_i + k_{gi} q_i = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m_{gi} = \{\varphi_i\}^T [M] \{\varphi_i\} \\ k_{gi} = \{\varphi_i\}^T [K] \{\varphi_i\} \end{cases}$$

3.1 Les fondamentaux du comportement dynamique de structure à n degrés de Liberté (schéma modale)

• Conclusion

Les équations sont alors découplées en q_i . Elles se résolvent facilement, puis on somme la réponse de chaque système à 1ddl
La solution en $\{x\}$ est ensuite obtenue par la matrice de passage

$$\{x\} = [\Phi]\{q\}$$

Le passage dans la base modale se traduit donc par l'obtention de n équations découplées analogues à celle obtenue pour un système à 1 seul degré de liberté.

3.1 Les fondamentaux du comportement dynamique de structure à n degrés de Liberté (schéma modale)

• **Vibrations forcées** $[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\}$ avec $\{F(t)\} = \{P\}\{f(t)\}$

Si nous effectuons le passage dans la base modale: $\{x\} = [\Phi]\{q\}$

$$[M][\Phi]\{\ddot{q}\} + [K][\Phi]\{q\} = \{F(t)\} \quad \text{Soit en pré multipliant par } [\Phi]^T$$

$$[\Phi]^T [M][\Phi]\{\ddot{q}\} + [\Phi]^T [K][\Phi]\{q\} = [\Phi]^T \{F(t)\}$$

$$\begin{bmatrix} \backslash & 0 \\ m_{gi} & \backslash \\ 0 & \backslash \end{bmatrix} \{\ddot{q}\} + \begin{bmatrix} \backslash & 0 \\ k_{gi} & \backslash \\ 0 & \backslash \end{bmatrix} \{q\} = [\Phi]^T \{F(t)\} \quad \text{Soit, pour le mode } i \quad \ddot{q}_i + \omega_i^2 q = \frac{\{\Phi\}^T \{P\} f(t)}{m_i}$$

$$\{\varphi_i\}^T \{P\} f(t) \quad \text{est la force généralisée}$$

3.1 Les fondamentaux du comportement dynamique de structure à n degrés de Liberté (schéma modale)

• Notions d'appropriation spatio-fréquentielle

Appropriation fréquentielle

Puisque nous sommes ramenés à un système à 1 degré de liberté, l'expression de la réponse à une excitation sinus s'écrit pour le mode i :

La résonance du mode i nécessite donc $\omega_i = \omega_0$

$$x = \left[\frac{f_i}{m_i(\omega_i^2 - \omega_0^2 + 2\omega_i\varepsilon_i)} \right]$$

Appropriation spatiale

rappelons l'expression de la force généralisée :

$$f_i = \{\varphi_i\}^T \{P\} f(t)$$

L'appropriation spatiale est réalisée lorsque :

$$\{\varphi_i\}^T \{P\} \neq 0$$

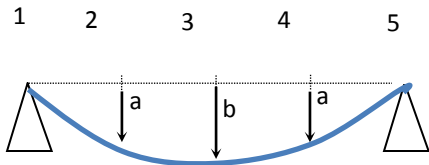
(donc quand le facteur de participation n'est pas nul)

3.1 Les fondamentaux du comportement dynamique de structure à n degrés de Liberté (schéma modale)

Exemple de compréhension d'appropriation spatiale

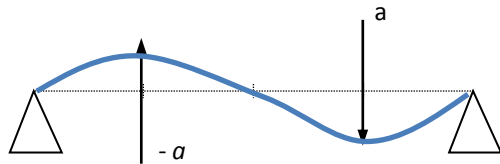
Considérons les 2 premiers modes propres d'une poutre appuyée - appuyée

Premier mode

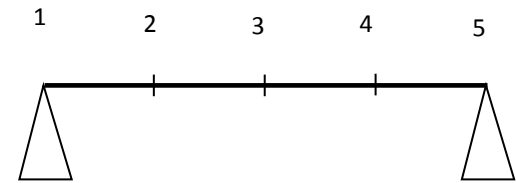


Pulsation propre ω_1 $\{\varphi_1\} = \lambda_1 \begin{Bmatrix} 0 \\ a \\ b \\ a \\ 0 \end{Bmatrix}$

deuxième mode

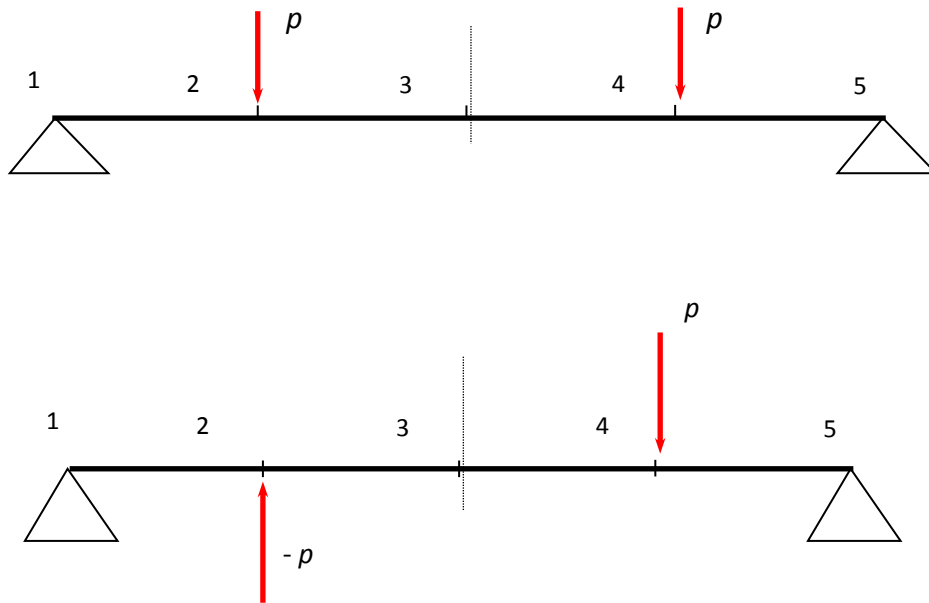


Pulsation propre ω_2 $\{\varphi_2\} = \lambda_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \\ a \\ 0 \end{Bmatrix}$



3.1 Les fondamentaux du comportement dynamique de structure à n degrés de Liberté (schéma modale)

Considérons deux excitateurs (rappel $\{F(t)\}=[P]\{f(t)\}$) avec une fréquence excitatrice en coïncidence fréquentielle avec le mode 1 et le mode 2, mais de répartition spatiale différente.

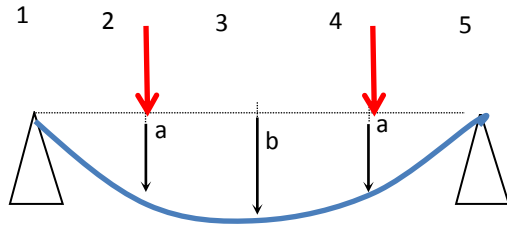


$$\{P_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ p \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{P_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -p \\ 0 \\ p \\ 0 \end{Bmatrix}$$

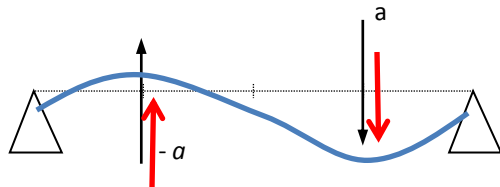
3.1 Les fondamentaux du comportement dynamique de structure à n degrés de Liberté (schéma modale)

Pour le mode n ° 1, l'appropriation spatiale sera réalisée lorsque les 2 excitateurs sont en phase et il y aura résonance si leur fréquence de pulsation vaut f_1



$$\{\varphi\}^T \{P_1\} = \lambda_1 \begin{Bmatrix} 0 \\ a \\ b \\ a \\ 0 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ p \\ 0 \end{Bmatrix} = 2ap\lambda_1 \neq 0$$

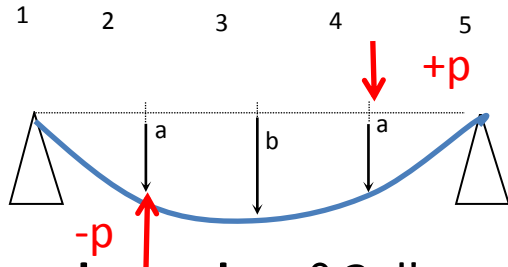
Pour le mode n ° 2, l'appropriation spatiale sera réalisée lorsque les 2 excitateurs sont en opposition de phase et il y aura résonance si leur fréquence de pulsation vaut f_2



$$\{\varphi\}^T \{P_2\} = \lambda_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ -a \\ b \\ a \\ 0 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ -p \\ 0 \end{Bmatrix} = -\lambda_2(ap + ap) \neq 0$$

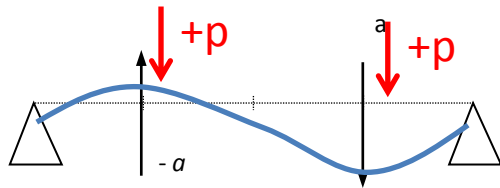
3.1 Les fondamentaux du comportement dynamique de structure à n degrés de Liberté (schéma modale)

Pour le mode n ° 1, l'appropriation spatiale ne sera pas réalisée lorsque les 2 excitateurs sont en opposition de phase et il n'y aura pas résonance même si leur fréquence de pulsation vaut f_1



$$\{\varphi\}^T \{P_1\} = \lambda_1 \begin{Bmatrix} 0 \\ a \\ b \\ a \\ 0 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ -p \\ 0 \\ p \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

Pour le mode n ° 2, l'appropriation spatiale ne sera pas réalisée lorsque les 2 excitateurs sont en phase et il n'y aura pas résonance même si leur fréquence de pulsation vaut f_2



$$\{\varphi\}^T \{P_2\} = \lambda_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ -a \\ b \\ a \\ 0 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ p \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

3.1 Les fondamentaux du comportement dynamique de structure à n degrés de Liberté (schéma modale)

Il n'existe pas, par définition, de système physique non amorti. En effet, toutes les structures ont un amortissement interne. Il existe une multitude d'amortissement : visqueux, structural, de Coulomb, aérodynamique, acoustique... Il est en général difficile de connaître précisément le type d'amortissement (qui peut être unique ou résultant d'une combinaison) présent dans une structure. En général, les calculs faits sur l'amortissement sont basés sur des hypothèses simplificatrices, le plus souvent dans le but de diagonaliser facilement les matrices $[K]$, $[M]$ et $[C]$. **EN EFFET ON SAIT PAS FACILEMENT DIAGONALISER TROIS MATRICES**

3.1 Les fondamentaux du comportement dynamique de structure à n degrés de Liberté amorti (schéma modale)

Trois types d'amortissements sont généralement envisagés

1 - L'amortissement proportionnel : soit a la masse soit a la raideur

2 - L'amortissement structural : $[C] = \frac{j\gamma}{\omega} [K]$

3 - L'amortissement visqueux quelconque : $[C] = \text{quelconque}$

Nous allons nous préoccupé de la solution pour un amortissement visqueux quelconque c'est dire pour une matrice d'amortissement non diagonale

3.1 Les fondamentaux du comportement dynamique de structure à n degrés de Liberté amorti (schéma modale)

Lorsque la matrice d'amortissement n'est pas proportionnelle ni à la matrice de masse, ni à celle de raideur et que les termes extra-diagonaux ne sont pas négligeables, on ne peut pas découpler directement les équations par la projection dans la base modale

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \quad \text{Ajoutons l'identité : } [M]\{\dot{x}\} = [M]\{\dot{x}\}$$

Ceci nous permet d'obtenir le **système d'équations d'ordre 2n** suivant :

$$\begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{\ddot{x}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [-M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F(t)\} \\ [0] \end{bmatrix}$$

3.1 Les fondamentaux du comportement dynamique de structure à n degrés de Liberté amorti (schéma modale)

Ce système est de la forme $[U]\{\dot{y}\} + [V]\{y\} = \{R(t)\}$ $\left(\text{avec } \{y\} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} \right)$

(Il est à noter que $[U]$ et $[V]$ sont symétriques)

La solution est de la forme $\{y\} = \{\varphi\}e^{\lambda t} \Rightarrow \{\dot{y}\} = \lambda \{\varphi\}e^{\lambda t} = \lambda \{y\}$

On arrive ainsi au système : $\begin{bmatrix} \lambda[U] - [-V] \end{bmatrix} \{\varphi\}e^{\lambda t} = \{R\}$

Qui s'écrit encore, en multipliant par $-[U]^{-1}$

$$\begin{bmatrix} [U]^{-1}[-V] - \lambda[I] \end{bmatrix} \{\varphi\} = \{R\}$$

3.1 Les fondamentaux du comportement dynamique de structure à n degrés de Liberté amorti (schéma modale)

En vibration libres ($\Leftrightarrow [R] = [0]$)

$$\begin{bmatrix} [U]^{-1}[-V] - \lambda[I] \end{bmatrix} \{\varphi\} = \{0\}$$

En éliminant la solution obsolète $\{\varphi\} = 0$, est donnée par $\det \begin{bmatrix} [U]^{-1}[-V] - \lambda[I] \end{bmatrix} = 0$

On obtient ainsi **2n valeurs propres** Par analogie à la solution d'un système à 1 ddl [

$$\lambda_v = -a_v \omega_v \pm j \omega_v \sqrt{1 - a_v^2} \quad \text{En posant} \quad \begin{array}{ll} \sigma = -a_v \omega_v & \lambda_v = \sigma + j \omega_d \\ \omega_d = \omega_v \sqrt{1 - a_v^2} & \overline{\lambda_v} = \sigma - j \omega_d \end{array}$$

Les solutions λ_v et $\overline{\lambda_v}$ sont ensuite réinjectées dans l'équation On obtient alors **2n vecteurs propres complexes conjugués 2 à 2 :**

$$\{\varphi_v\} = \begin{Bmatrix} \{\psi_v\} \\ \lambda_v \{\psi_v\} \end{Bmatrix}$$

Les vecteurs propres (complexes conjugués deux à deux) respectivement représentent la déformée propre de la structure



3.2 Analyse Modale Expérimentale

Principe

L'analyse modale a pour principe de déduire les matrices vibratoires des paramètres "fréquences de résonance" et "déformées de la structure" réelle ou du prototype en maquette.

Ce principe repose sur une technique qui est celle de l'acquisition des fonctions de transfert (interspectres) entre les efforts générés par une excitation extérieure pilotée et la réponse de la structure sur des points de discrétisation

L'extraction modale, qui consiste à établir une base modale incomplète (fréquences propres, déformées propres) s'effectue en utilisant des méthodes de lissage exploitant les fonctions de transfert acquises sur la base d'un modèle mathématique approprié



3.2 Analyse Modale Expérimentale

- **Matrice des fonctions de transfert**

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{f(t)\}$$

Transformée de Laplace (en supposant $X_0 = X_0' = 0$) :

$$\Rightarrow p^2 [M]\{X(p)\} + [K]\{X(p)\} = \{F(p)\} \quad [B(p)]\{X(p)\} = \{F(p)\}$$

$$\{X(p)\} = [B(p)]^{-1} \{F(p)\} = [H(p)]\{F(p)\} \quad [H(p) \text{ Matrice de transfert}]$$

On peut alors écrire $[H]$ sous la forme :

$$H(p) = [B]^{-1} = \frac{[B]^{*T}}{\det[B]}$$

[avec $[B]^{*T}$ = matrice adjointe de $[B]$ (transposée de cofacteurs)]



3.2 Analyse Modale Expérimentale

• Relation entre fonctions de transfert et paramètres modaux

- Les éléments de $H(p)$ sont des fractions rationnelles.
- $\det [B]$ représente l'équation caractéristique du système, ses racines sont les valeurs propres.
- Les éléments de $[H]$ peuvent être décomposés en éléments simples.

$$[H_{mn}] = \sum_{j=1}^n \left(\frac{A_j}{(p - p_j)} + \frac{\overline{A_j}}{(p - \overline{p_j})} \right) \quad \left(\begin{array}{l} p_j = j\omega d_j \\ A_j \quad \overline{A_j} \text{ résidus} \end{array} \right)$$

$$[A_j] = \frac{[B(p = p_j)]^{*T}}{\alpha (p_j - p_1)(p_j - \overline{p_1}) \dots (p_j - p_n)(p_j - \overline{p_n})} \quad \text{matrice transposée des cofacteurs de } [B] :$$

Sauf $(p_j - p_j)$

3.2 Analyse Modale Expérimentale

- Relation entre fonctions de transfert et paramètres modaux

On montre que

$$[H(p)] = \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k \{\psi_k\} \{\psi_k\}^T}{(p - p_k)} - \frac{a_k \{\overline{\psi_k}\} \{\overline{\psi_k}\}^T}{(p - \overline{p_k})} \right)$$

$$\text{avec : } a_k = \frac{C_{11}(p_k)}{\alpha(p - \overline{p_k})(p_k - p_m)(p_k - \overline{p_m})}$$

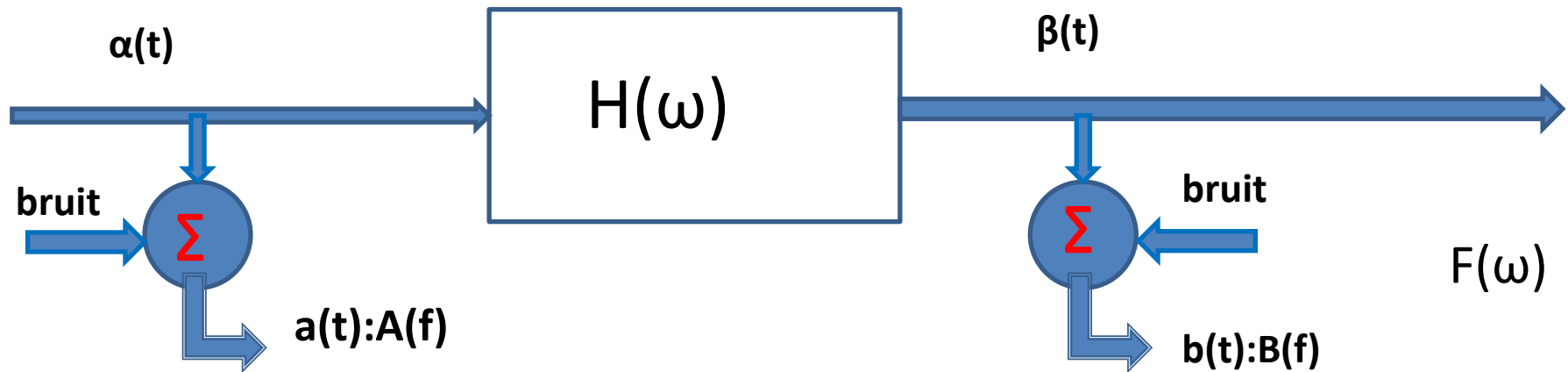
Pour $\begin{cases} m = 1, \dots, n \\ m \neq k \end{cases}$

Chaque colonne ou ligne de $H(p)$

est constituée de tous les paramètres modaux du système.

4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Le modèle boîte noire ou fonction de transfert (FRF)



$$H(f) = \frac{B(f)}{A(f)} \quad \Leftrightarrow \quad B(f) = H(f).A(f)$$

on exprime ainsi la sortie du système comme le produit de l'entrée par la fonction de transfert.

4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Si on multiplie la sortie par le spectre conjugué de l'entrée, il vient :

$$\bar{A}(f).B(f) = H(f).A(f).\bar{A}(f)$$

$$G_{AB}(f) = H(f).G_{AA}(f)$$

$$H(f) = \frac{G_{AB}(f)}{G_{AA}(f)} = H_1(f)$$

Si on multiplie la sortie par son spectre conjugué :

$$\bar{B}(f).B(f) = H(f).A(f).\bar{B}(f)$$

$$G_{BB}(f) = H(f).G_{BA}(f)$$

$$H(f) = \frac{G_{BB}(f)}{G_{BA}(f)} = H_2(f)$$

Avec $G_{AB}(f)$ L'interspectre entre les voies A et B et $G_{BB}(f)$ L'autospectre de la voie B

Si les mesures à l'amont et à l'aval du système pouvaient ne considérer qu'exclusivement l'énergie qui traverse le système, les deux égalités obtenues seraient équivalentes. Cependant, en pratique, la connaissance que l'on obtient du signal d'entrée est entachée de bruit (dû à la chaîne de mesure,...) qui n'entre pas dans un système ; de même, la sortie reçoit l'énergie qui a traversé le système, mais probablement aussi de l'énergie parasite venant d'ailleurs :

4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Ceci justifie que l'équivalence entre h_1 et h_2 ne soit en fait pas respectée, on est alors conduit à définir la **fonction de cohérence** par le rapport :

$$\gamma^2(f) = \frac{\overline{H_1(f)}}{\overline{H_2(f)}} = \frac{\overline{G_{AB}} \cdot \overline{G_{BA}}}{\overline{G_{AA}} \cdot \overline{G_{BB}}}$$

La barre supérieure pointillée indique le moyennage. Cette fonction n'a aucun sens sur une mesure unitaire ; elle doit accompagner la mesure d'une fonction de transfert suffisamment moyennée, à laquelle elle apporte un crédit dans les bandes de fréquences où elle est proche de l'unité.

Dans cette fonction on trouve des fonctions caractérisant l'entrée (G_{AA}) et la sortie (G_{BB}) et les relations entrée-sortie (G_{AB} et G_{BA}) ; elle caractérise le système dans sa totalité.

4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Si on remplace $A(f)$ par le spectre de la force d'entrée il vient

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{k=1}^n X(jf) F_k^*(jf)}{\sum_{k=1}^n F(jf) F_k^*(jf)} = h1 = \frac{\sum_{k=1}^N G_{yk}(jf)}{\sum_{k=1}^N G_{xk}(jf)}$$

avec : $G_{yk}(jf)$ interspectre (amplitude et phase) des deux signaux
 $G_{xk}(jf)$ autospectre du signal d'entrée.

$H(f)$ est le rapport complexe des spectres sortie sur entrée. elle varie en fonction de la fréquence. Ce **modèle effectue la liaison entre le analytique SDOF et les mesures pratiques**

4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

La fonction de cohérence exprime à chaque fréquence la quantité de relation linéaire entre l'entrée et la sortie;

- $\gamma^2=1 \Rightarrow B(f)$ vient exclusivement de $A(f)$ qui traverse le système
- $\gamma^2=0 \Rightarrow A(f)$ ne traverse pas le système ; $B(f)$ vient d'ailleurs
- $0 < \gamma^2 < 1 \Rightarrow$ il y a cohérence partielle

Avoir une cohérence faible peut être due à :

- Une faible linéarité du système
- La présence de bruit
- La présence de retard
- La présence de rebonds lors d'une excitation impulsionnelle
- Une mauvaise fenêtre de pondération fréquentielle
- Une résolution fréquentielle (ou longueur de bloc temporelle) insuffisante.



4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Présentation de la méthode

Un essai d'analyse modale d'une structure peut être décomposé en trois phases

a) La définition de l'environnement expérimental qui nécessitera de choisir :

- Le maillage de la structure, c'est-à-dire les points d'excitation et de réponse,
- Le type d'excitation,
- Le découplage de la structure (conditions limites).

b) L'identification des fréquences propres qui consiste à acquérir les fonctions de transfert (réponse/excitation) en tous les points du maillage puis à les stocker et à les archiver.

c) L'extraction des paramètres modaux qui permet d'obtenir fréquence propre, amortissement propre et déformée propre de chaque mode appartenant à la fenêtre fréquentielle étudiée, en vue d'une validation par synthèse modale (superposition des fonctions de transfert mesurée et calculée).

4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Environnement expérimental

Maillage de la structure

Il est constitué de l'ensemble des points d'excitation et réponse

- **Choix des points d'excitation**

La précision des paramètres modaux dépend de la qualité des fonctions de transfert sur lesquelles se fera l'excitation modale. Il est donc nécessaire de choisir une excitation adéquate de la structure.

Dans le cas de structure de faibles dimensions une excitation ponctuelle sera suffisante, dans le cas de structure de grandes dimensions, l'énergie vibratoire est dissipée rapidement et plusieurs excitations convenablement réparties seront alors nécessaires.



4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Environnement expérimental

Le choix des points d'excitation sera gouverné par deux critères.

•Exciter le plus de modes possibles dans la bande de fréquence d'intérêt en évitant les nœuds de vibration.

Une première approche intuitive se basant sur la nature des modes recherchés (flexion, torsion), ainsi que des essais préliminaires réalisés en déplaçant l'excitateur, permettront de retenir l'emplacement adéquat et de recenser les fréquences de résonance.

•Choix des zones rigides et massives

Elles permettent :

- une meilleure répartition de l'énergie d'excitation dans la structure,
- de ne pas rendre prépondérant des modes locaux,
- de réduire l'incidence des effets secondaires dus à l'excitation (apport de masse, raideur, amortissement),
- une meilleure excitation des hautes fréquences en supportant mieux un effort ponctuel important (sans déformation plastique pouvant entraîner des non-linéarités).

4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Environnement expérimental

Choix des points de réponse

Il dépend du contexte de l'essai d'analyse modale ce choix devra permettre de :

- définir clairement la géométrie de la structure,
- représenter les formes propres des modes étudiés (position des nœuds et ventres)
- coïncider avec des nœuds du maillage E.F.,
- comprendre des points utiles aux simulations ultérieures
- réponse de la structure à un cas de charge,
- modification des structures,
- assemblage des structures.



4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Environnement expérimental

-Techniques d'excitation

Elles sont de 4 types

:

- impulsionnelle
- aléatoire
- sinus balayant
- pseudo aléatoire

4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Environnement expérimental

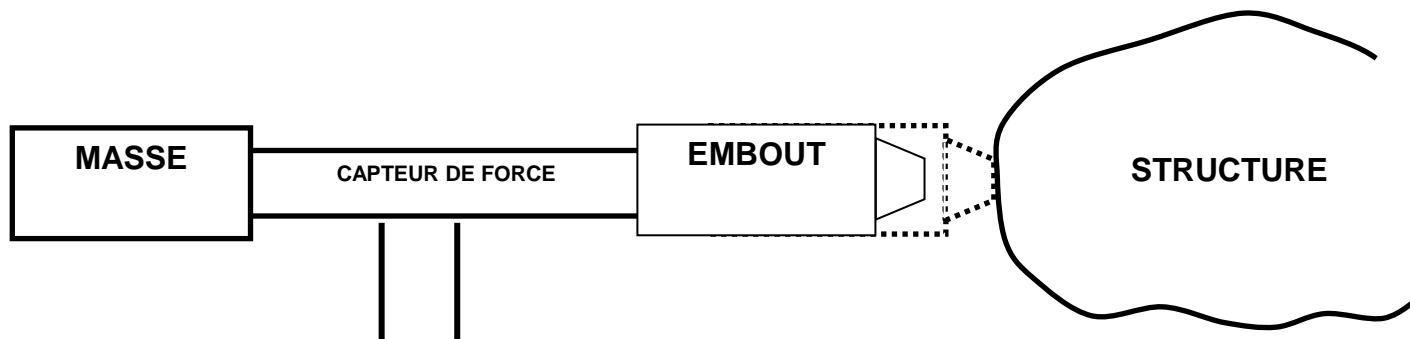
•L'excitation impulsionnelle

Elle est fréquemment mise en œuvre au moyen d'un marteau instrumenté d'un capteur de force. L'étendue fréquentielle de l'excitation dépend :

- de la raideur de l'embout du marteau,
- de la masse du marteau.

On peut également utiliser un balancier ou un pot vibrant asservi

EXCITATION IMPULSIONNELLE :



4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Environnement expérimental

•Avantages

- Bonne répartition de l'énergie dans la bande de fréquence de l'excitation (bruit blanc).
- Rapidité de mise en œuvre particulièrement adaptée à la recherche des points d'application.
- Apport de raideur et d'amortissement négligeables.
- Apport de masse négligeable lorsque la structure est peu amortie.
- Peu coûteuse.

•Inconvénients

- Reproductibilité de l'excitation.
- Niveau de force non contrôlable.
- Risque de plasticité de la zone excitée lors de la recherche de niveaux importants.
- Bande de fréquence dépendante de la raideur de la zone excitée.
- Niveau faible pour chaque raie spectrale.
- Imprécision de position et de direction.

•Domaine d'utilisation

- Toute structure en première approche.
- Structure faiblement amortie pour avoir suffisamment d'informations sur la fenêtre d'acquisition
- Structure linéaire, Plusieurs points d'excitation.

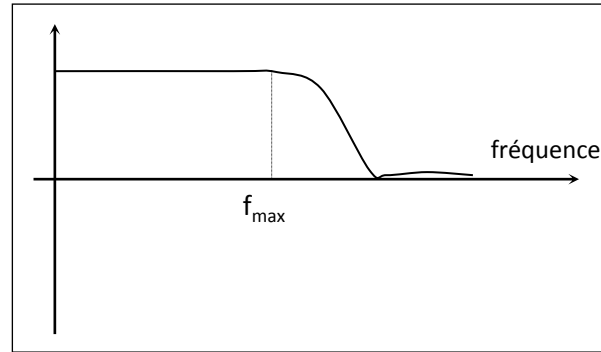
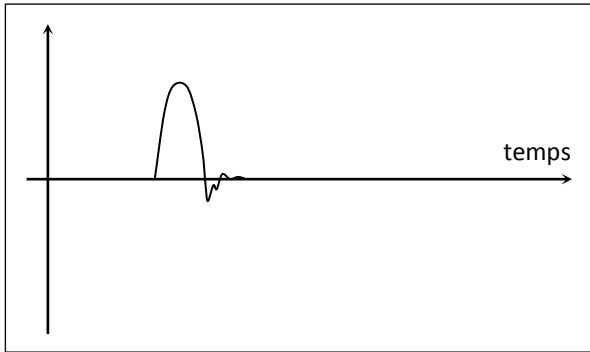
4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Environnement expérimental

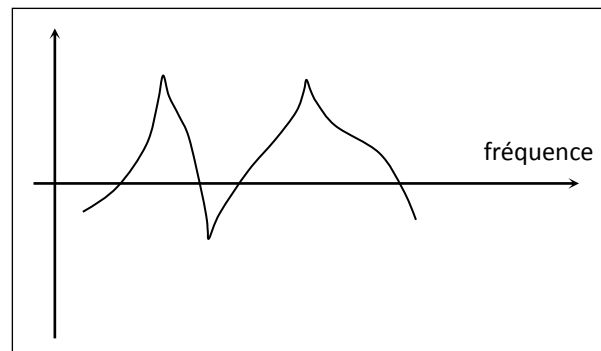
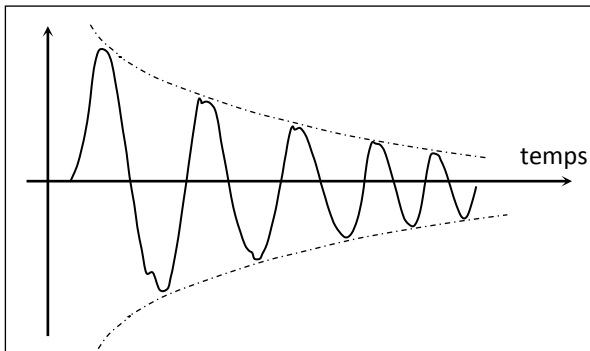
EXCITATION IMPULSIONNELLE

Transformée de Laplace

Signal
force



Réponse
de la
structure

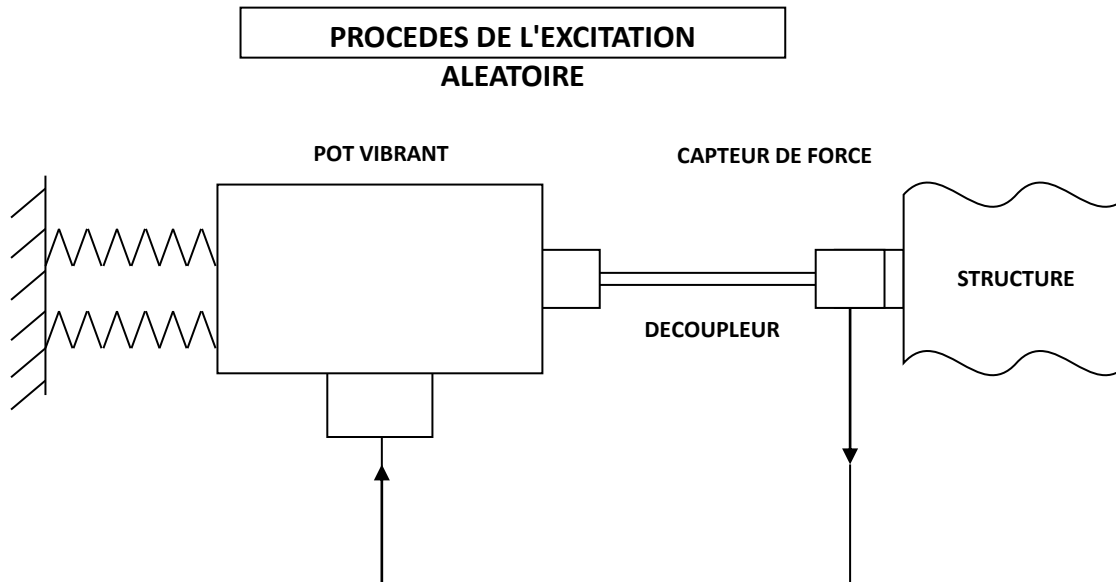


4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Environnement expérimental

•Excitation aléatoire

Elle est mise en œuvre au moyen d'excitateur soit de type électrohydraulique ($f_n^{\max} \leq 500$ Hz) soit électrodynamique ($f_n^{\max} \leq 5$ Hz) relié à la structure par l'intermédiaire d'un capteur de force.



Le niveau d'énergie peut-être modulé par bandes de fréquence, ce qui permet d'améliorer le rapport signal/bruit particulièrement aux anti-résonances.

4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Environnement expérimental

•Avantages de cette technique

- Niveau d'énergie facilement ajustable si l'on dispose du fenêtrage.
- Reproductibilité des conditions d'essais.
- Rapidité de traitement par recouvrement.
- Elimination de bruit par moyennage

•Inconvénients

- Mise en œuvre longue.
Peu adapté aux structures non linéaires.
- Rapport signal/bruit médiocre si l'on ne possède pas le fenêtrage.
- Apport relatif de masse de raideur et d'amortissement.
- Risque de signal aléatoire imparfait (régime entretenu).
- Technique coûteuse.

•Domaines d'utilisation

- Technique fréquemment utilisée en projet industriel.
- Toutes tailles de structure.
- Tout niveau d'amortissement.
- Structures linéaires.

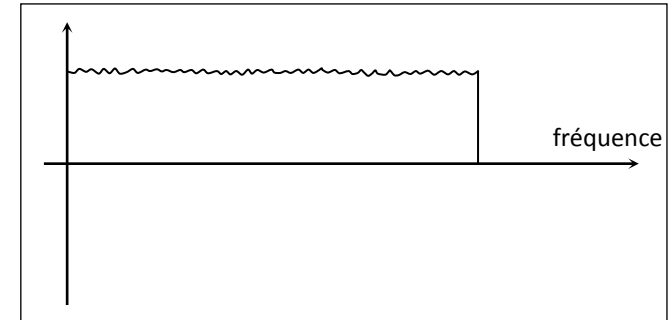
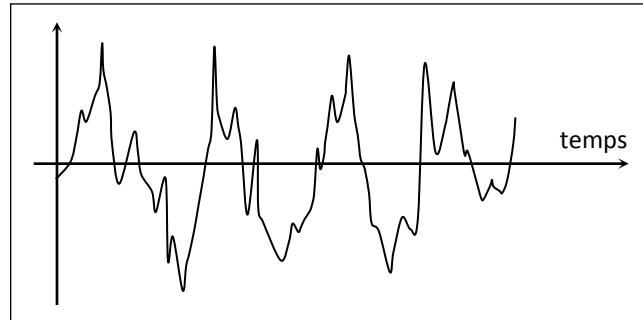
4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Environnement expérimental

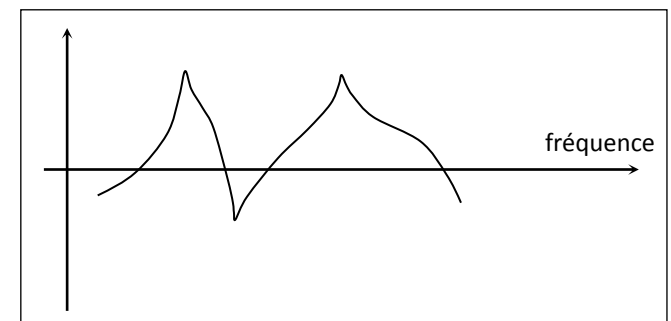
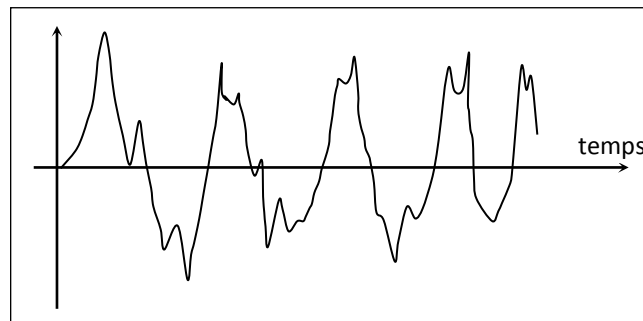
EXCITATION ALEATOIRE

Transformée de Laplace

Signal
force



Réponse de
la structure



4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Environnement expérimental

•L'excitation en balayage sinus

- Cette technique est également mise en œuvre au moyen d'excitateurs électro-dynamiques ou électro-hydrauliques.

On rencontre également l'utilisation de masse excentrée en rotation.

Le temps de moyennage doit être un multiple du temps d'acquisition.

4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Environnement expérimental

•Avantage de cette technique

- Niveau d'excitation parfaitement contrôlé.
- Energie concentrée sur chaque ligne spectrale.
- Adaptée aux structures non linéaires et aux modes couplés.

•Inconvénients

- Durée des tests plus importante
- Niveaux de réponse dépendant de la vitesse de balayage.
- Mise en œuvre longue.
- Coûteuse, nécessite un générateur sinus à balayage.

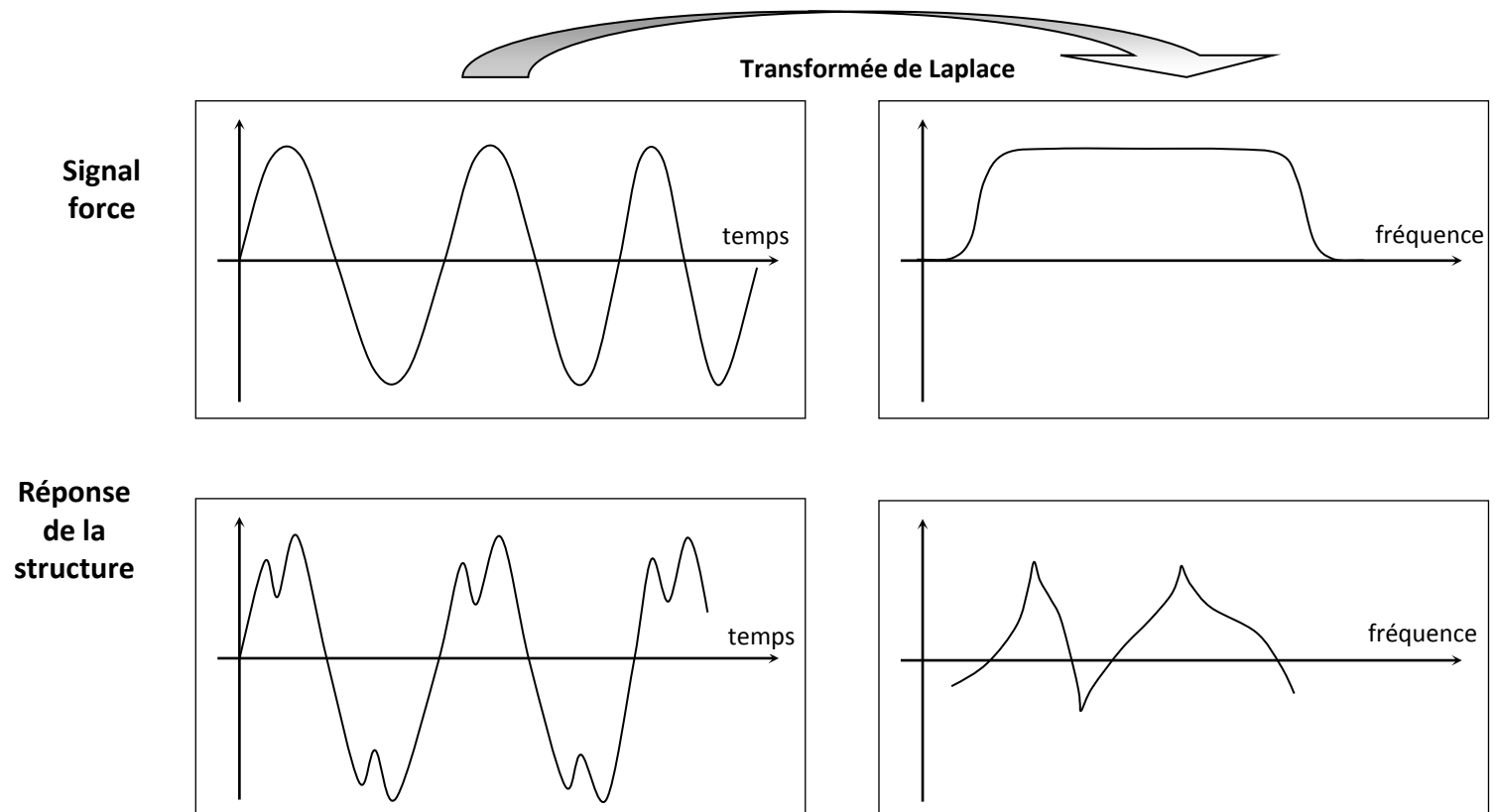
•Domaines d'utilisation

Structures non linéaires, toutes dimensions, tous amortissements.

4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Environnement expérimental

EXCITATION EN BALAYAGE SINUS



4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Environnement expérimental

- Identification modale - Acquisition des fonctions de transfert

Les structures présentent une infinité de modes propres. On retiendra en pratique un nombre fini de points en direction et localisation. Ainsi, n points pourront définir n modes. En chaque point une force peut être appliquée et un déplacement mesuré, ceci permet de définir la matrice de transfert. Cette matrice contient n^2 éléments, mais nous avons vu que la connaissance d'une colonne ou rangée contient toutes les informations modales.

$$\begin{Bmatrix} X_1(j\omega) \\ \vdots \\ X_n(j\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(j\omega) & \dots & H_{1n}(j\omega) \\ \vdots & & \vdots \\ H_{n1}(j\omega) & \dots & H_{nn}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1(j\omega) \\ \vdots \\ F_n(j\omega) \end{Bmatrix}$$

4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Environnement expérimental

-Validation et exploitation préliminaires

Un essai d'analyse modale nécessite avant de débiter, de vérifier réciprocity et linéarité du système étudié.

Le test de réciprocity s'effectue en inversant excitation et réponse.

Le test de linéarité s'effectue en faisant varier l'intensité de l'excitation pour un couple (excitation/réponse) donné.

Une exploitation immédiate de l'ensemble des acquisitions peut également être effectuée. Il s'agit de visualiser la déformée réelle prise par la structure en des fréquences significatives (maxima d'amplitude) des fonctions de transfert.

De plus pour des modes découplés la visualisation d'une déformée réelle peut donner une bonne approximation de la déformée modale.

4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Environnement expérimental

-Extraction des paramètres modaux

Le choix d'une technique d'extraction modale dépend des orientations prises dans les phases précédentes, de l'essai.

Cependant, nous pouvons considérer qu'il est gouverné par trois critères principaux :

- Le nombre de fréquences propres dans la fenêtre d'analyse, et leur couplage,
- La valeur des amortissements,
- Le type d'excitation et la résolution en fréquence.

4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Environnement expérimental

-Extraction des paramètres modaux

Diverses méthodes peuvent être envisagées pour calculer les paramètres modaux, que ce soit dans les domaines des temps (réponse impulsionnelle) ou dans celui des fréquences (réponse en fréquence).

Chacune d'elles utilise une formulation analytique appropriée. Nous allons ci-après, présenter succinctement deux techniques de calcul couramment employées.

L'une fait appel à un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, et repose sur la représentation de la fonction de transfert dans le plan de Nyquist. Elle effectue le calcul mode par mode.

L'autre utilise les expressions complètes de la fonction de transfert et la réponse impulsionnelle, et effectue les calculs sur tous les modes à la fois.

4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Environnement expérimental

-Expression finale de la fonction de transfert

Reprenons l'expression d'un des termes de la matrice des fonctions de transfert mesuré en régime harmonique, obtenue par une excitation au point j et une réponse au point i .

$$H_{ij}(j\omega) = \frac{X_i}{F_j} = \sum_{k=1} \frac{a_k \{\psi_{ik}\} \{\psi_{jk}\}^T}{(j\omega - p_k)} + \frac{a_k \{\overline{\psi_{ik}}\} \{\overline{\psi_{jk}}\}^T}{(j\omega - \overline{p_k})}$$

Posons : $a_k \psi_{ik} \psi_{jk} = U_{ijk} + jV_{ijk}$ $p_k = -\sigma + j\omega_d$ Il vient :

$$H_{ij}(j\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{U_{ijk} + jV_{ijk}}{-\sigma + j(\omega - \omega_d)} + \frac{U_{ijk} - jV_{ijk}}{-\sigma + j(\omega + \omega_d)}$$

Rem : 4 paramètres définissent chaque mode : U_{ijk} , V_{ijk} , σ , ω_d et 4n paramètres définissent complètement la fonction de transfert.

4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Environnement expérimental

-Expression finale de la fonction de transfert

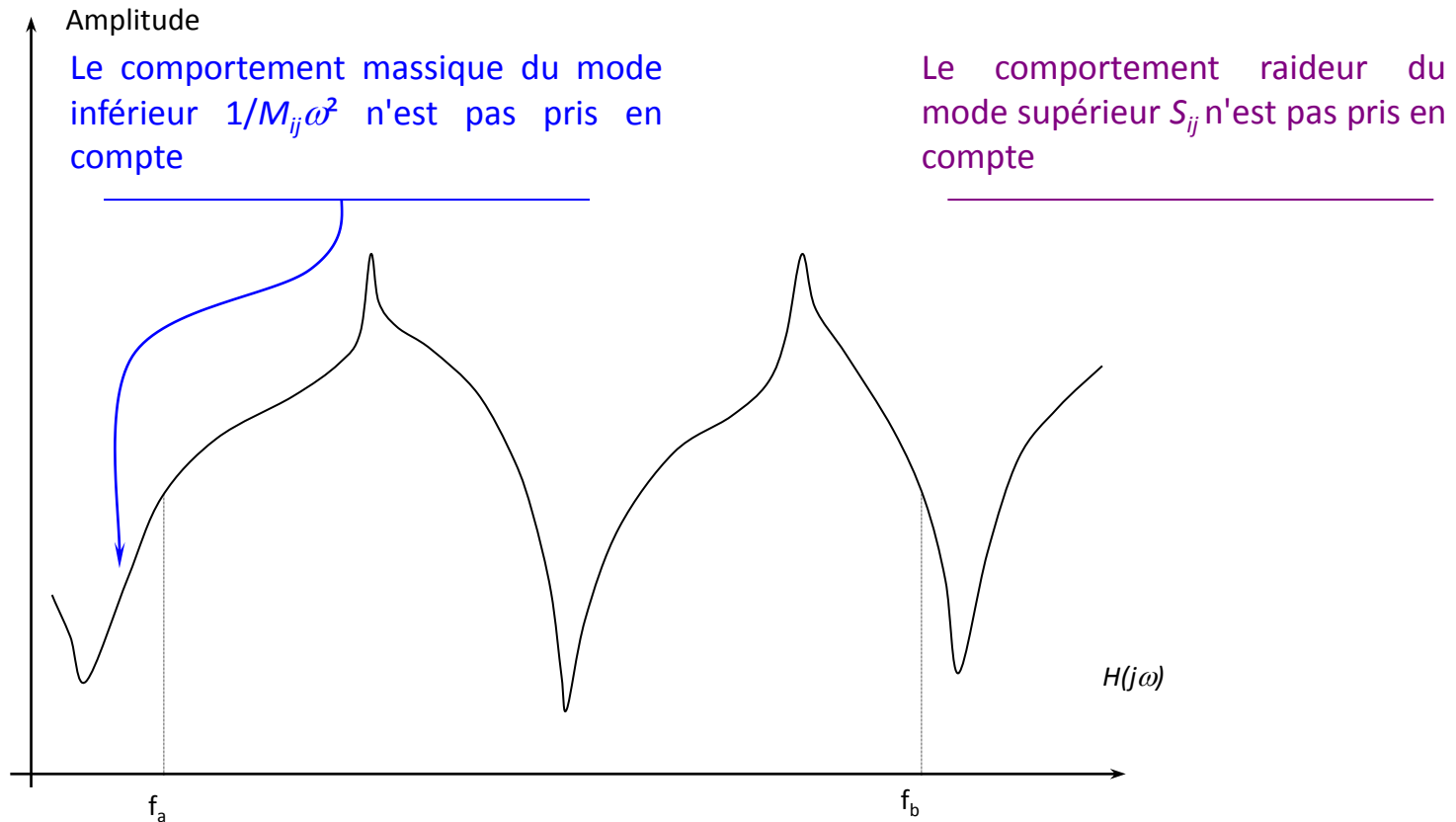
Dans la plupart des cas, seule une gamme de fréquence nous intéresse. Aussi, afin de prendre en considération les modes figurant hors de la gamme d'analyse, il est nécessaire de prendre en compte, dans la formulation de la fonction de transfert, deux termes complémentaires :

- un terme d'inertie (masse pour corriger les modes basses fréquences omis) ;
- un terme de flexibilité pour corriger les modes hautes fréquences omis Le modèle final utilisé est donc :

$$H_{ij}(j\omega) = -\frac{1}{M_{ij}\omega^2} + \sum_{k=1}^n \frac{U_{ijk} + jV_{ijk}}{-\sigma + j(\omega - \omega_d)} + \frac{U_{ijk} - jV_{ijk}}{-\sigma + j(\omega + \omega_d)} + S_{ij}$$

4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Environnement expérimental



4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Environnement expérimental

-Expression de la réponse impulsionnelle

La fonction de transfert est la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle, on peut donc, par transformation inverse, obtenir celle-ci :

$$h_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n \left[(U_{ijk} + jV_{ijk}) \exp(\sigma_k + j\omega_k)t + (U_{ijk} - jV_{ijk}) \exp(\sigma_k - j\omega_k)t \right]$$

Comme dans le cas de la fonction de transfert, on peut décomposer la réponse impulsionnelle en une somme de 3 termes représentant la contribution des modes compris entre : 0 et ω_A puis ω_A et ω_B , puis ω_B et ω_∞ .

$$h_{ij}(t) = 2 \operatorname{Re} \left(B_{ijA} e^{s_A t} + \sum_{K=1}^n B_{ijk} e^{s_k t} + B_{ijB} e^{s_B t} \right)$$

4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

- Méthode du cercle d'admittance

- Principe

Cette méthode est basée sur la représentation de la fonction de transfert dans le plan complexe et sur deux hypothèses :

- modes peu couplés
- amortissement modal faible.

Si l'on considère la formulation (9), en ne s'intéressant qu'à la partie de la fonction de transfert où un mode est prépondérant, on montre que le respect des hypothèses précédentes permet de simplifier cette expression qui se réduit à l'équation d'un cercle dans le plan complexe.

Le rayon du cercle, les coordonnées de son centre ainsi que son orientation sont fonction des paramètres modaux et des termes complémentaires de la fonction de transfert

4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

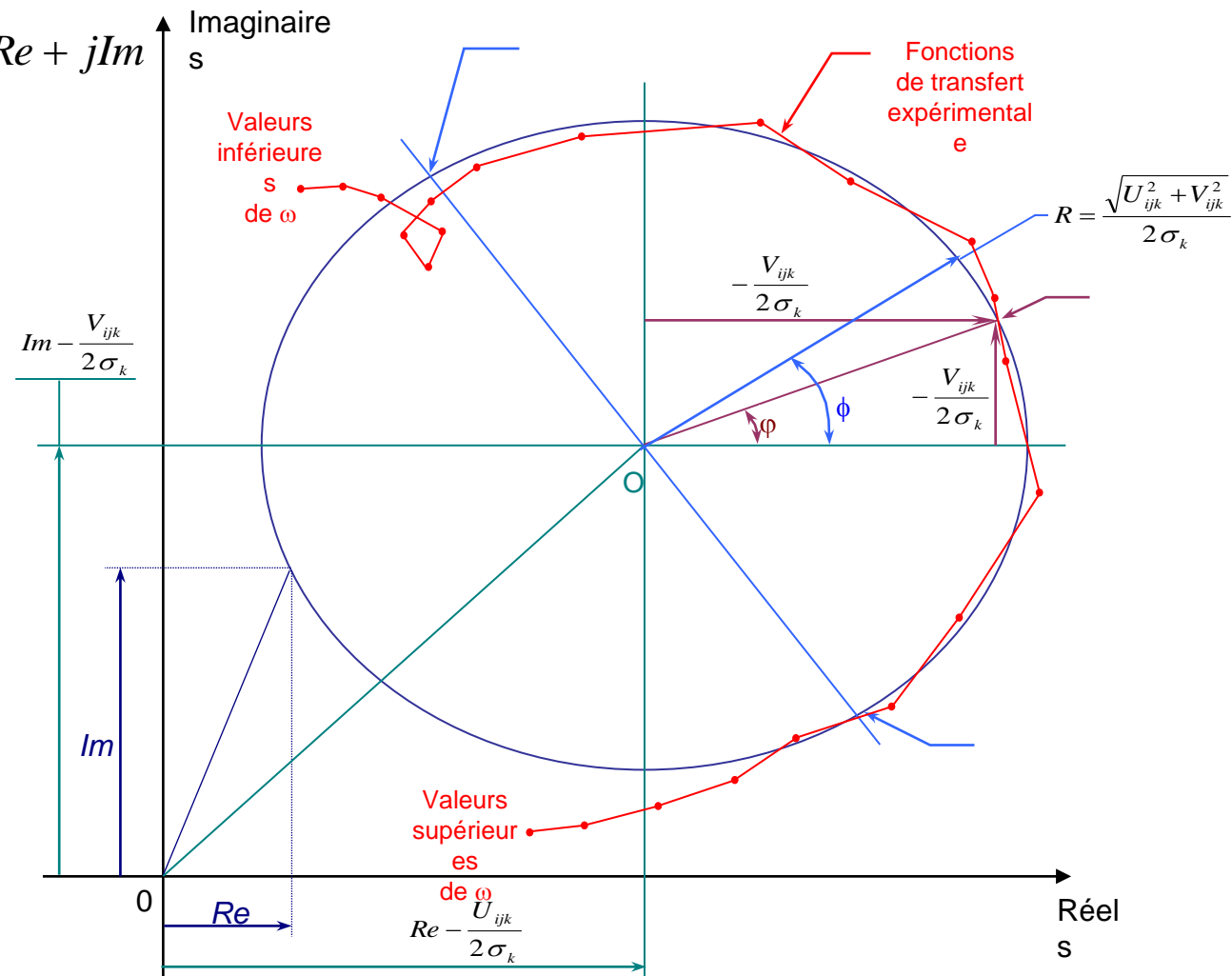
$$H_{ijk}(j\omega) = \frac{U_{ijk} + jV_{ijk}}{-\sigma_k + j(\omega - \omega_k)} + Re + jIm$$

-Calculs des paramètres modaux

La représentation de la fonction de transfert totale dans le plan complexe est une succession de n arcs de cercle correspondant aux n modes de la gamme de fréquences étudiée.

Après avoir isolé un mode en sélectionnant un intervalle de fréquence adéquat (f_{\min} ; f_{\max}), on superpose aux points retenus le cercle analytique approchant le mieux ces points, dont on aura calculé l'équation par les moindres carrés.

L'espacement entre les points de la courbe expérimentale et l'équation théorique fourniront la valeur des inconnues modales au mode considéré, pour la mesure choisie.



4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

-Avantages :

- . Méthode interactive à caractère pédagogique
- . Introduction de l'opérateur sur la sélection de la fonction de transfert

-- Inconvénients:

- . Identification mode par mode (et point par point)
 - . Problèmes de sous-définition de la fonction de transfert discréditée
- Influence de l'amortissement

4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

-Méthode des moindres carrés exponentielle complexe

Cette méthode utilise la transformée de Fourier inverse de la fonction de transfert, ou réponse impulsionnelle échantillonnée.

L'extraction des fréquences propres et amortissement modaux se fait par une technique de lissage de la réponse impulsionnelle (Méthode de PRONY).

Le calcul des coefficients modaux s'effectue en utilisant une méthode des moindres carrés basée sur l'expression

$$h_{ij}(t) = 2 \operatorname{Re} \left(B_{ijA} e^{S_A t} + \sum_{K=1}^n B_{ijk} e^{S_k t} + B_{ijB} e^{S_B t} \right)$$

4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Principe

Les étapes sont les suivantes :

- Calcul de la réponse impulsionnelle par transformation inverse de la fonction de transfert.
- Calcul de l'autocorrélation de la réponse impulsionnelle.
- Constitution et résolution d'un système linéaire donnant les coefficients d'un polynôme dont les racines sont $e^{(j\omega_k + \sigma_k)\Delta t}$, l'opérateur fixant le degré du polynôme.
- Calcul des racines du polynôme puis des fréquences propres et des amortissements modaux.
- Suivant le degré choisi (n généralement $> n$ modes suspectés + 2) certains résultats, non physiques, sont à éliminer par l'opérateur
-
- Constitution d'un système linéaire $(2n + 2)$ à partir de l'expression

$$h_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n \left[(U_{ijk} + jV_{ijk}) \exp(\sigma_k + j\omega_k)t + (U_{ijk} - jV_{ijk}) \exp(\sigma_k - j\omega_k)t \right]$$

permettant de calculer : $\frac{1}{M_{ij}}$; S_{ij} ; U_{ijk} et V_{ijk}

4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

•Avantages

- Traite plusieurs modes à la fois,
- Rapidité de calcul,
- Bonne précision sur un nombre réduit de modes,
- Validation du modèle modal obtenu par comparaison de la fonction analytique et de $H(\omega)$.

•Inconvénients

- Traite une seule fonction,
- L'imprécision des résultats augmente avec le nombre de modes,
- Nécessite de procéder de manière interactive sur des portions de fonction de transfert.

Rem : une amélioration de la méthode consiste à consulter toutes les fonctions de transfert et à faire varier le degré du polynôme d'interpolation.

On peut ainsi obtenir :

- l'évolution des pôles en fonction du degré d'interpolation.
- la stabilité du pôle en fonction des points de mesure.

4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

Méthode multifonctions:

Cette méthode consiste à appliquer la méthode précédente à toutes les fonctions de transfert et d'en extraire les tendances.

Pour cela, on crée une matrice de corrélation qui cumule les informations de chaque fonction par produit de corrélation.

La synthèse des résultats est ensuite visualisée et montre l'évolution des pôles en fonction du nombre de modes

Visualisation des déformées modales :

Le calcul des déplacements modaux permet de visualiser le déplacement de chaque point de la structure et successivement pour chaque fréquence propre extraite.

L'animation sur écran permet d'identifier le mode de déformée.

4. aspect pratique de l'analyse modale expérimentale

- Conclusion

L'essai d'analyse modale est un outil indispensable pour caractériser le comportement dynamique d'une structure car il présente l'avantage de se baser sur des acquisitions réelles qui intègrent entièrement le contexte de l'installation et en particulier certaines particularités que l'on peut difficilement appréhender dans d'autres méthodes analytiques, telles que conditions limites ou amortissements internes.

Cependant, cette technique reste "une affaire de spécialiste" car l'opérateur à tous les stades de l'investigation est confronté à un certain nombre de choix qui sont déterminants dans la qualité des résultats obtenus.

A titre indicatif, dans le cas d'une machine tournante la caractérisation des premiers modes propres d'un stator et de ses pattes de fixation, ou d'un rotor sur ses paliers nécessitera le maillage d'une cinquantaine de points, soit l'acquisition et le traitement de 150 fonctions de transfert.

5. Etudes de cas: Analyses modales expérimentales & Modèles numériques

Etude des ailettes d'une turbine à vapeur:

Contexte de l'étude:

Une société de maintenance Turbines a proposé à un de ses clients une étude visant à valider une modification de conception d'ailettes du 1^{er} étage d'une turbine à vapeur. En effet, ces ailettes de la roue 1 ont cassé à plusieurs reprises.

Pour cela:

- ✓ Une étude statique a été menée afin d'évaluer les contraintes générées par la force centrifuge (rotation du rotor) suivant différentes conditions d'appuis du pied des ailettes dans la rainure.
- ✓ Une étude dynamique a permis de recalibrer le modèle éléments finis (FEM) sur des mesures expérimentales (analyse modale expérimentale).

5. études de cas analyse expérimentales & Modèles numériques

Etude des ailettes d'une turbine à vapeur:

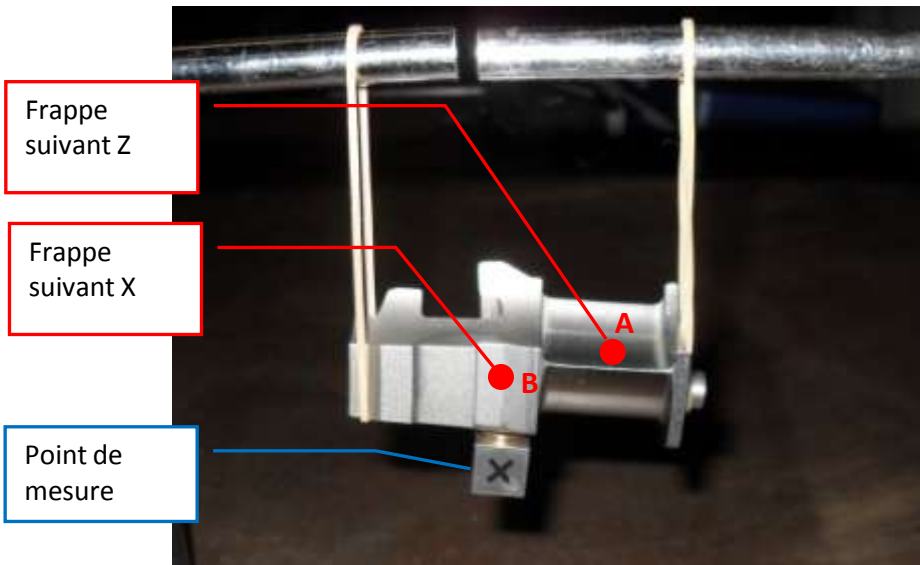
- ✓ 1 ailette
(analyse modale expérimentale + modèle FEM)
- ✓ 2 ailettes soudées au chapeau
(analyse modale expérimentale + modèle FEM)



5. études de cas analyse expérimentales & Modèles numériques

□ Cas d'une ailette seule (C.L libre)

Analyse modale expérimentale sur 1 ailette :



Nous avons suspendu l'ailette à l'aide de deux élastiques afin de simuler une condition limite libre-libre.

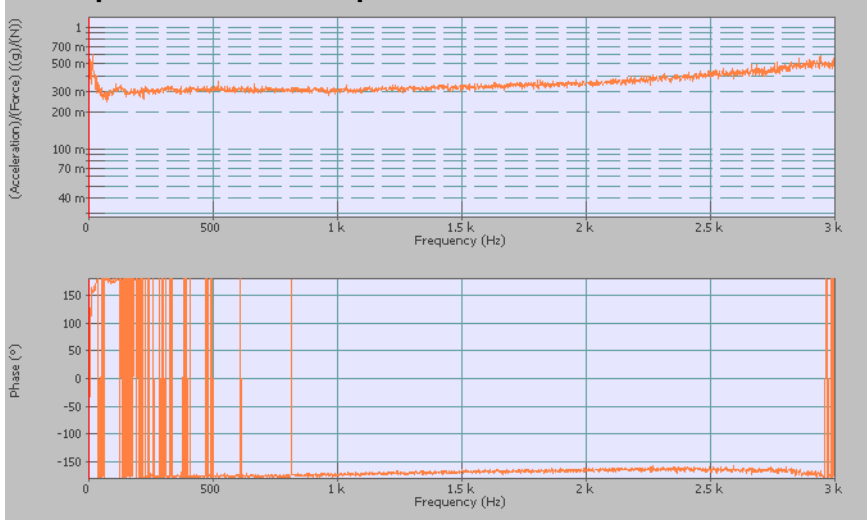
Les fonctions de transferts ont été mesurées dans ces conditions, en excitant l'ailette sur deux points (A et B) et en mesurant la réponse sur le pied, au point C.

5. études de cas analyse expérimentales & Modèles numériques

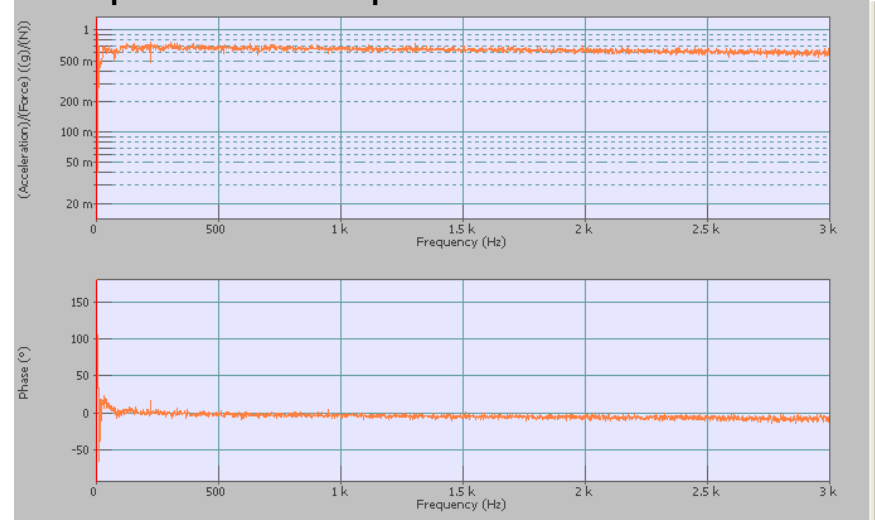
❑ Cas d'une ailette seule (C.L libre)

Analyse modale expérimentale sur 1 ailette :

Frappe au point B dans la direction X et réponse mesurée sur le pied de l'ailette au point C dans la direction X :



Frappe au point A dans la direction Z et réponse mesurée sur le pied de l'ailette au point C dans la direction Z :

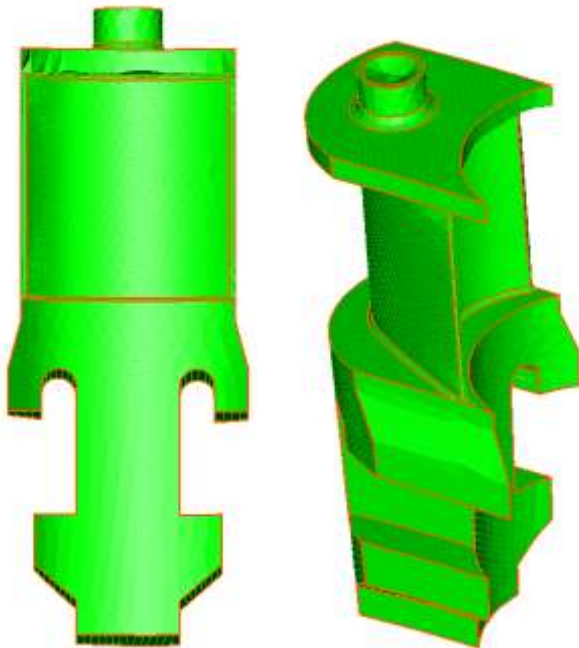


Nous n'observons aucune fréquence propre de l'ailette en condition limite libre-libre sur la gamme fréquentielle d'étude 0-3000 Hz.

5. études de cas analyse expérimentales & Modèles numériques

❑ Cas d'une ailette seule (C.L libre)

Modèle FEM : 1 ailette (conditions libre-libre)



Récapitulatif sur le modèle:

Types d'Elément	- triangle parabolique à coque mince : 7372 - tétraèdre parabolique solide : 22773
Propriétés Physiques	- SOLIDE1 : 22773 - COQUE MINCE2 : 7372
Matériaux	- X12CR13 : 30145

Propriétés physiques du matériau X12CR13:

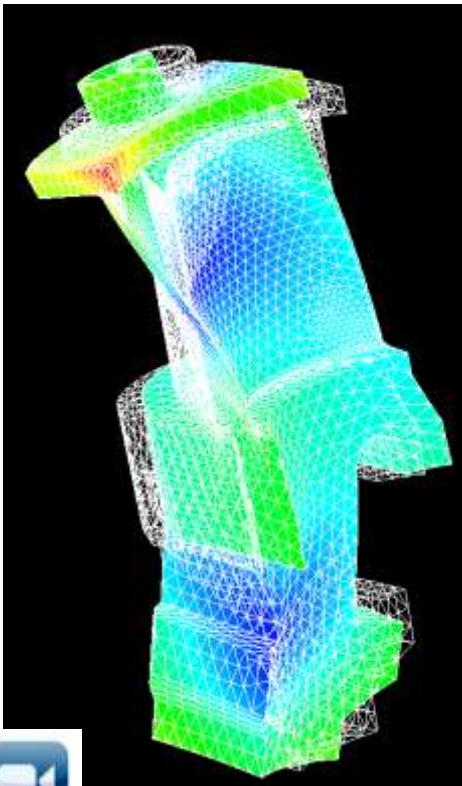
Module d'élasticité	200 GPa
Coefficient de poisson	0.3
Masse volumique	7700 kg/m ³

5. études de cas analyse expérimentales & modèles numériques

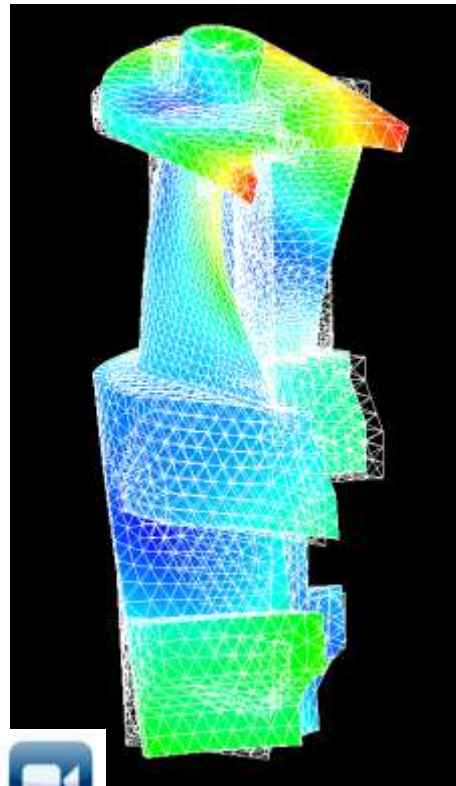
❑ Cas d'une ailette seule (C.L libre)

Modèle FEM : 1 ailette (conditions libre-libre)

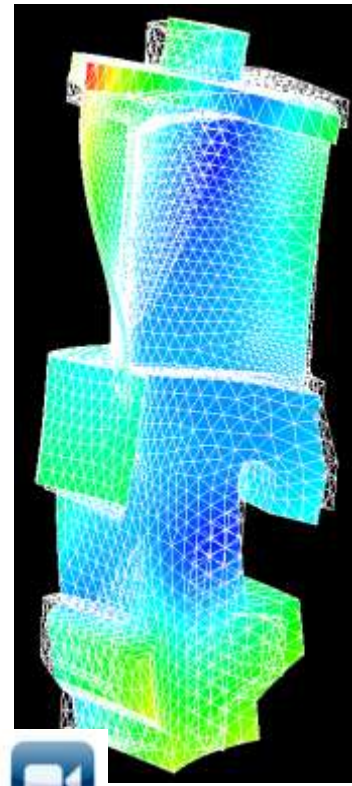
Mode n°1: 10259 HZ



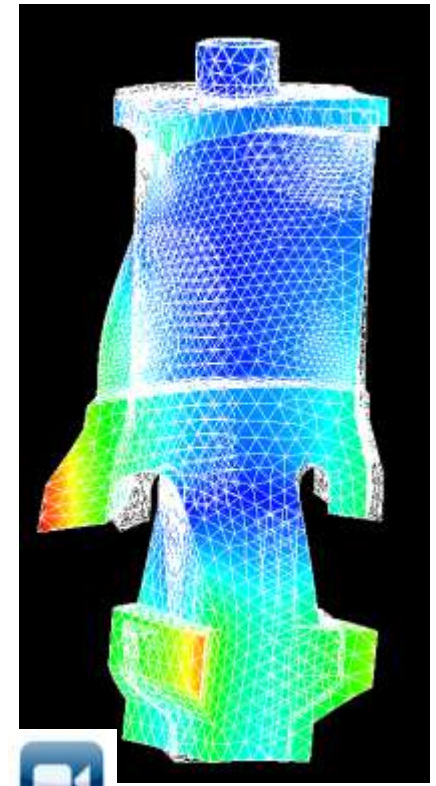
Mode n°2: 11783 HZ



Mode n°3: 12129 HZ



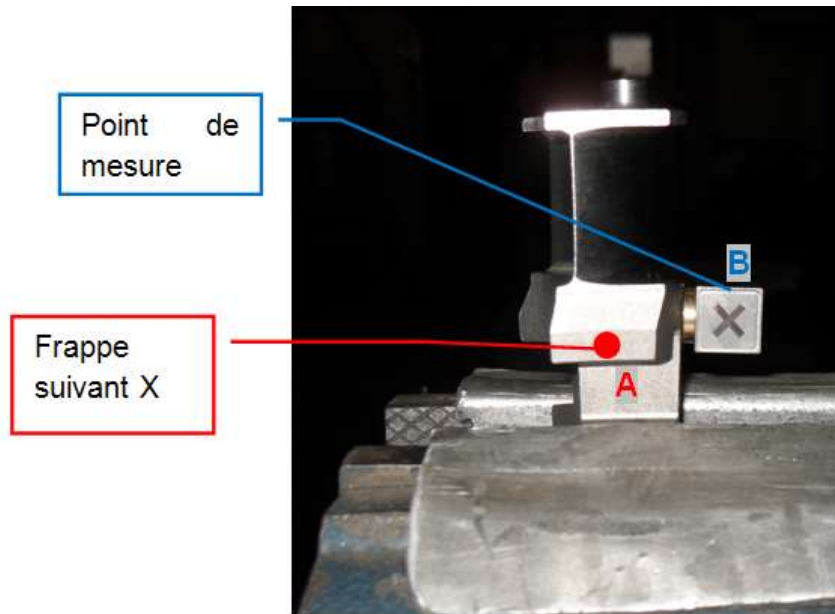
Mode n°4: 19961 HZ



5. études de cas analyse expérimentales & modèles numériques

❑ Cas d'une ailette seule (Blocage pied)

FRF sur 1 ailette :



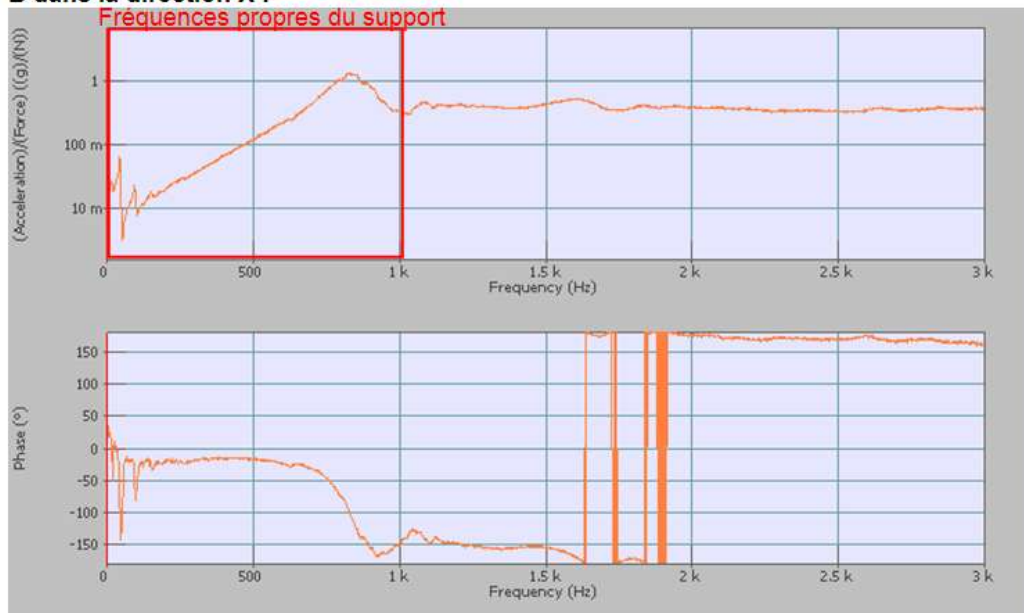
Nous avons serré le pied de l'ailette dans un étau afin de simuler une condition limite « **encastrée** ». Les fonctions de transferts ont été mesurées dans ces conditions en excitant l'ailette au point A et en mesurant la réponse sur le pied au point B.

5. études de cas analyse expérimentales & modèles numériques

❑ Cas d'une ailette seule (Blocage pied)

Fonction de réponse en fréquence (FRF):

Frappe au point A dans la direction X et réponse mesurée sur le pied de l'ailette au point B dans la direction X :



La présence du support de fixation (étau+table) influence la réponse mesurée.

Les premières fréquences de résonance visibles (<1kHz) correspondent aux modes propres du support et non pas à l'ailette

Nous n'observons aucune fréquence propre de l'ailette en conditions limite « encastree » sur la gamme fréquentielle d'étude 0-3000 Hz (limite d'étude expérimentale avec le marteau de choc)

5. études de cas analyse expérimentales & modèles numériques

❑ Cas d'une ailette seule (Blocage pied)

Modèle FEM (Finite Element Method)

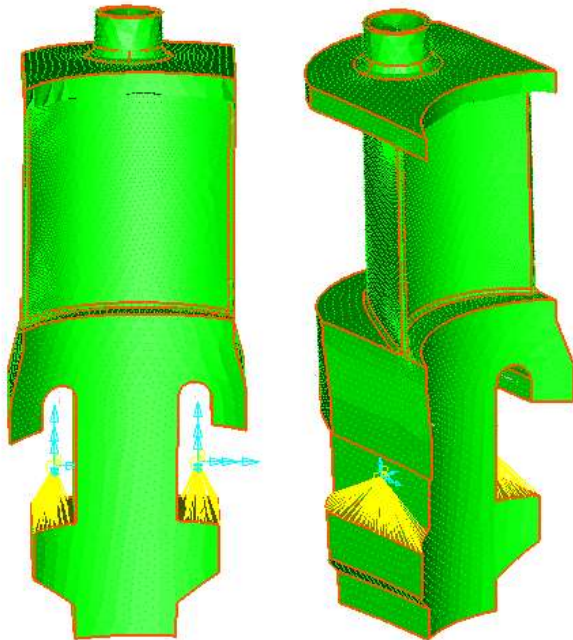


Fig: Géométrie de l'ailette

Modélisation de la condition limite de fixation de l'ailette lorsque cette dernière est "plaquée" dans la rainure de la roue par la force centrifuge.

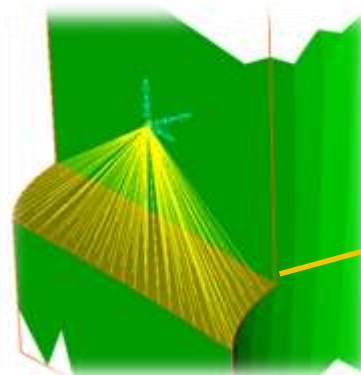


Fig: Surface d'appuis

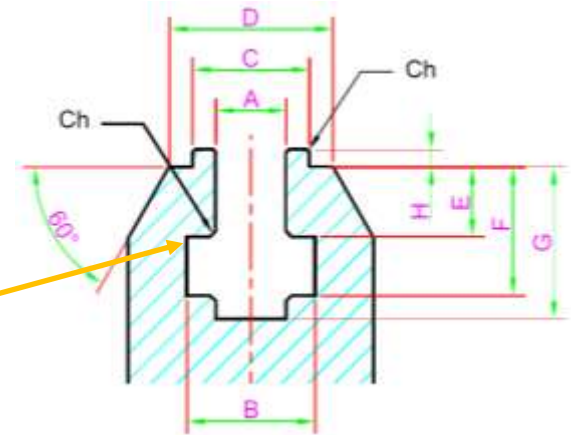


Fig: Coupe de la roue 1

Du fait des jeux entre l'ailette et la rainure, nous pouvons considérer que l'ailette est en contact avec la rainure sur la partie inférieure du pied (surfaces en jaune sur la figure ci dessous). La condition de bridage (encastrement), imposée sur les ddl des nœuds au contact sont:

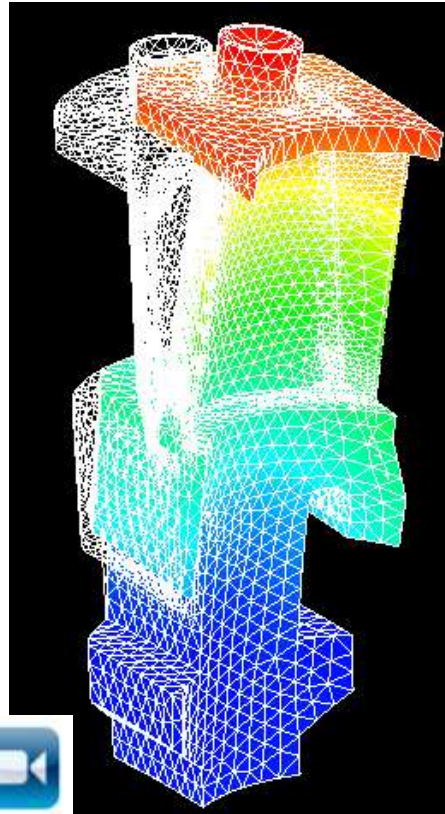
- blocage des 3 rotations (autour de l'axe x, y et z) ;
- blocage des 3 translations (suivant l'axe x, y et z).

5. études de cas analyse expérimentales & modèles numériques

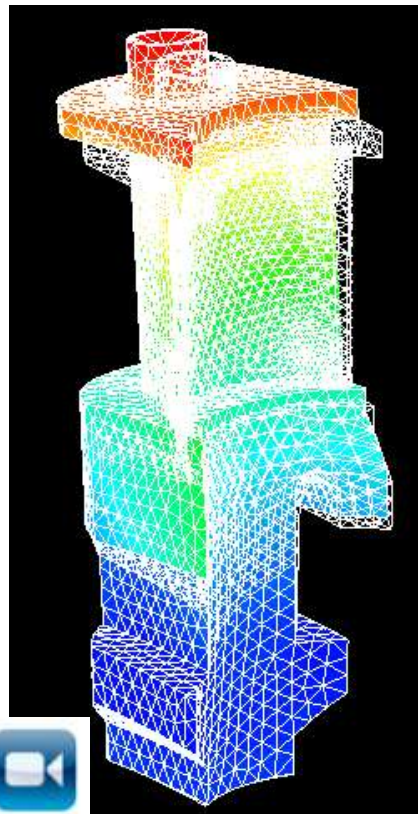
❑ Cas d'une ailette seule (Blocage pied)

Modèle FEM : Déformées modales calculées

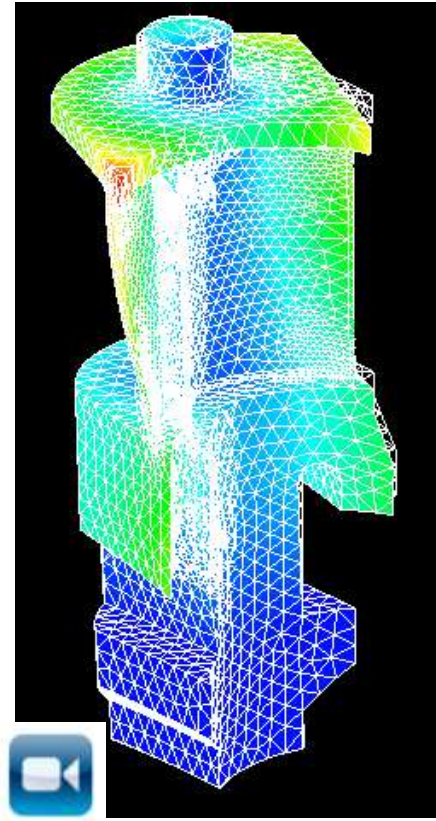
Mode n°1: 2590 HZ



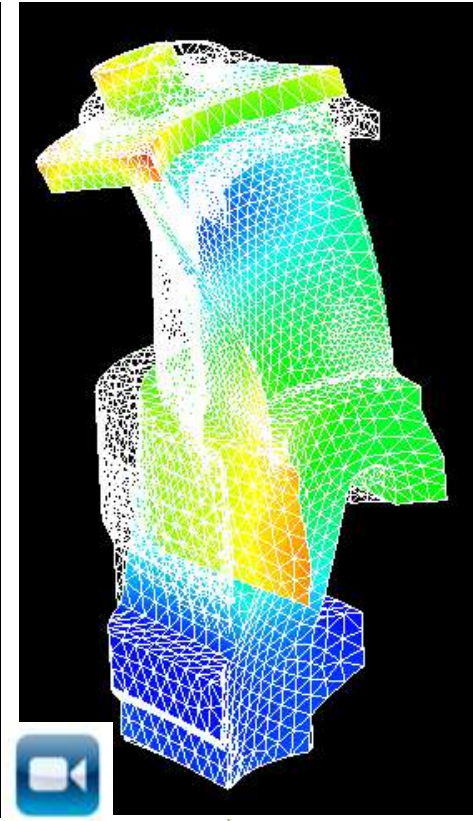
Mode n°2: 3100 HZ



Mode n°3: 7380 HZ



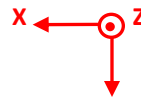
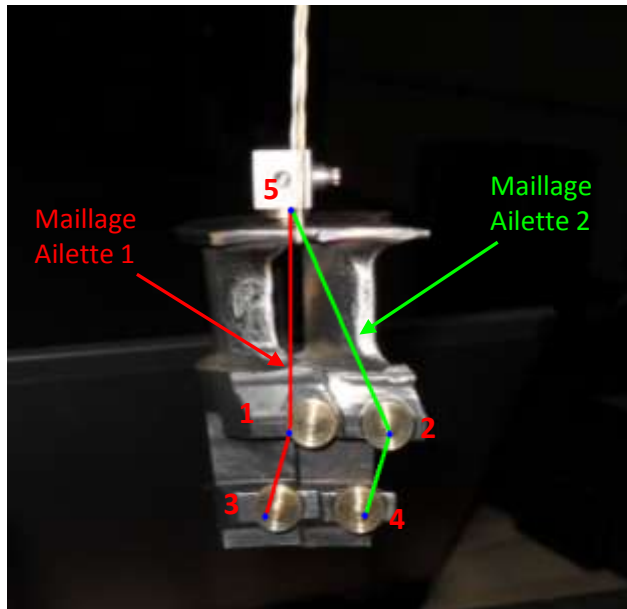
Mode n°4: 11600 HZ



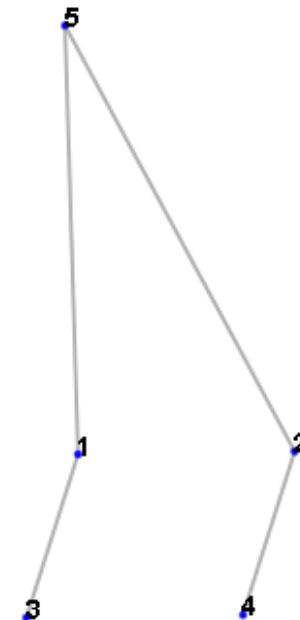
5. études de cas analyse expérimentales & modèles numériques

□ Cas de 2 ailettes soudées au chapeau (C.L libre)

Maillage du modèle d'analyse modale :

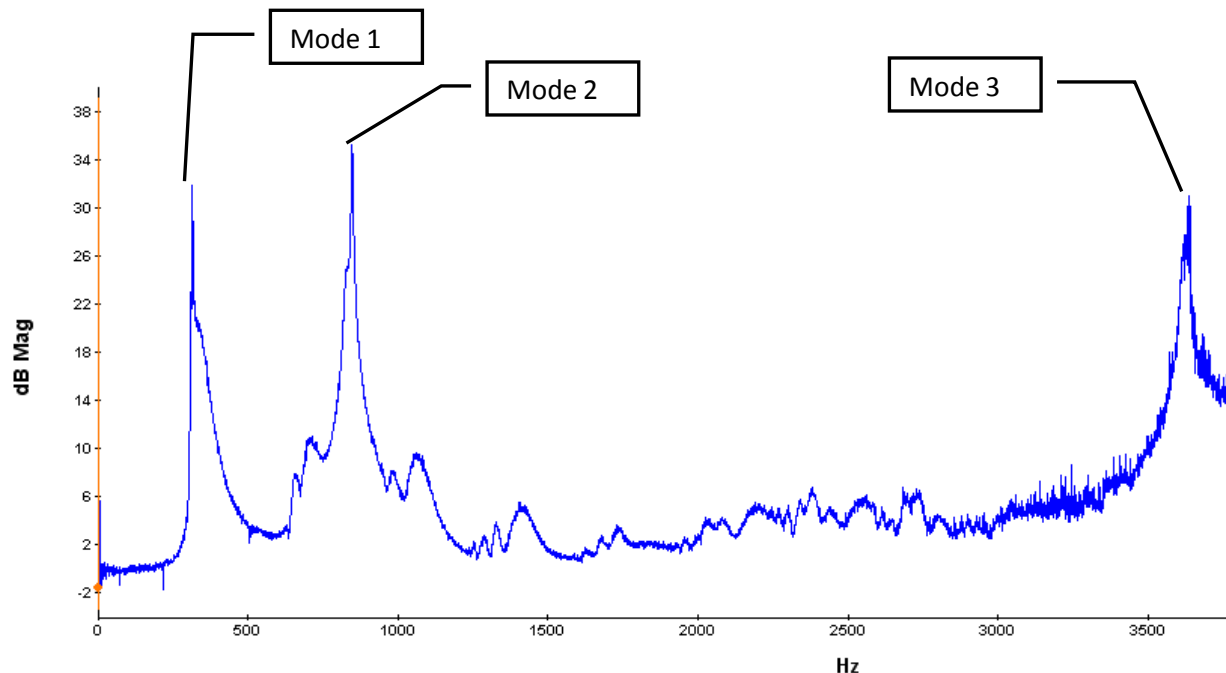


Undeformed Structure Geometry



5. études de cas analyse expérimentales & modèles numériques

□ Cas de 2 ailettes soudées au chapeau (C.L libre)



No. #	Fréquence (Hz)	Amortissement (%)
Mode 1	328.17	0.19
Mode 2	843.43	0.3
Mode 3	3662.92	0.04

5. études de cas analyse expérimentales & modèles numériques

□ Cas de 2 ailettes soudées au chapeau (C.L libre)

Mode n°1 : 328 Hz

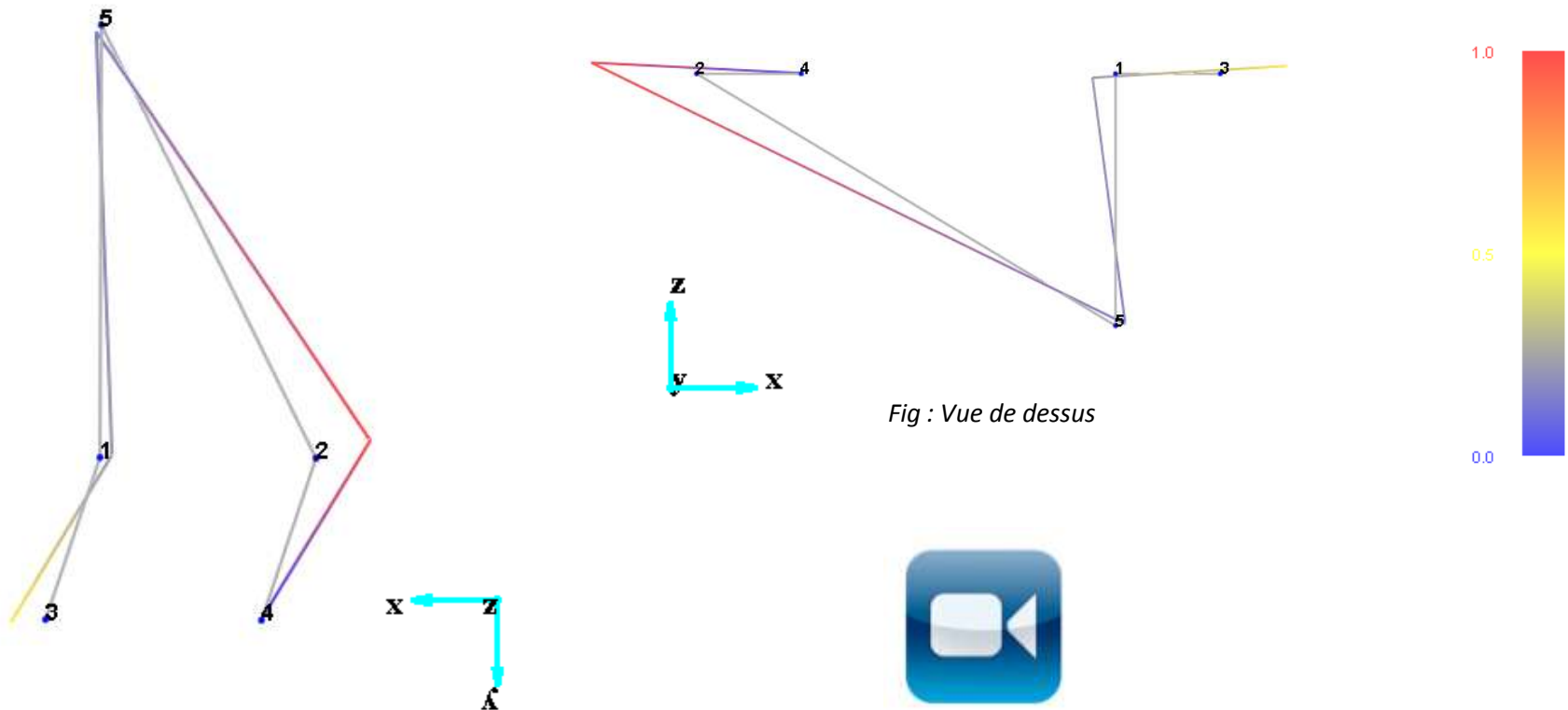


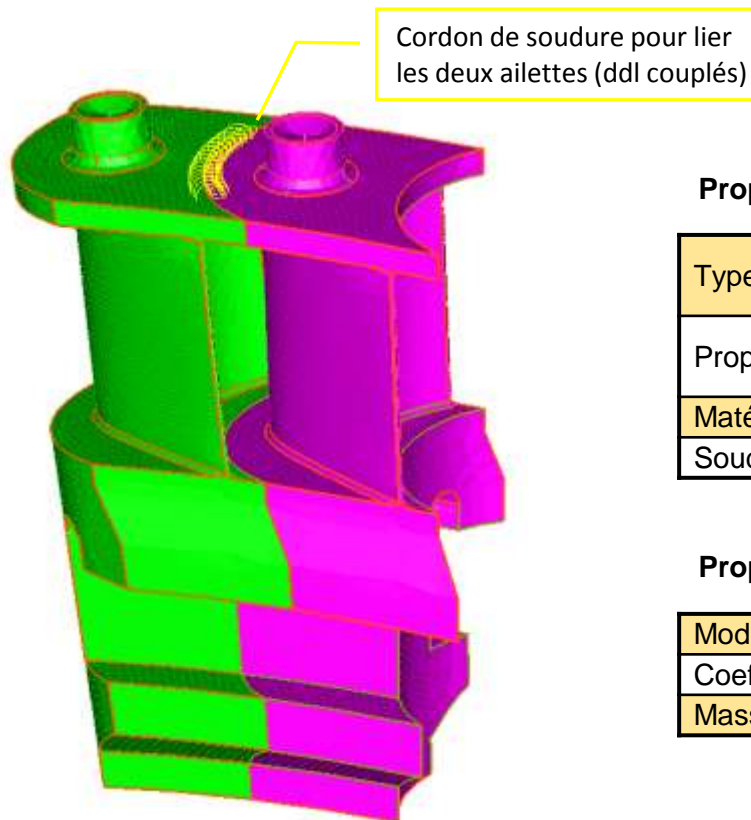
Fig : Vue de face

Fig : Vue de dessus

5. études de cas analyse expérimentales & modèles numériques

□ Cas de 2 ailettes soudées au chapeau (C.L libre)

Modèle FEM : 2 Ailettes soudées au chapeau



Propriétés générales du modèle:

Types d'Elément	- triangle parabolique à coque mince : 14782 - tétraèdre parabolique solide : 45719
Propriétés Physiques	- SOLIDE1 : 45719 - COQUE MINCE2 : 14782
Matériaux	- X12CR13 : 60501
Soudure	-17 ddl couplés (3 rotations, 3 translations actives)

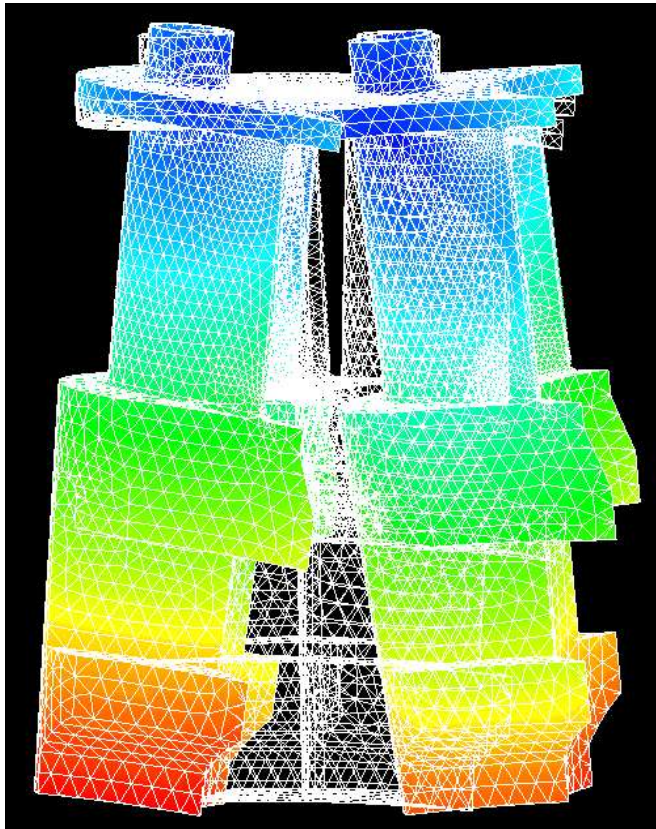
Propriétés physiques du matériau X12CR13:

Module d'élasticité	200 GPa
Coefficient de poisson	0.3
Masse volumique	7700 kg/m ³

5. études de cas analyse expérimentales & modèles numériques

□ Cas de 2 ailettes soudées au chapeau (C.L libre)

Mode n°1: 291 Hz



Modes de corps rigide (pas de déformation des ailettes), autour du cordon de soudure.

Le cordon de soudure est le paramètre influent sur ce mode, plus précisément le nombre de couplage que l'on lui associe sur le modèle FEM. Plus la soudure est étendue, plus le mode est décalé en haute fréquence (rigidification du système à 2 ailettes).

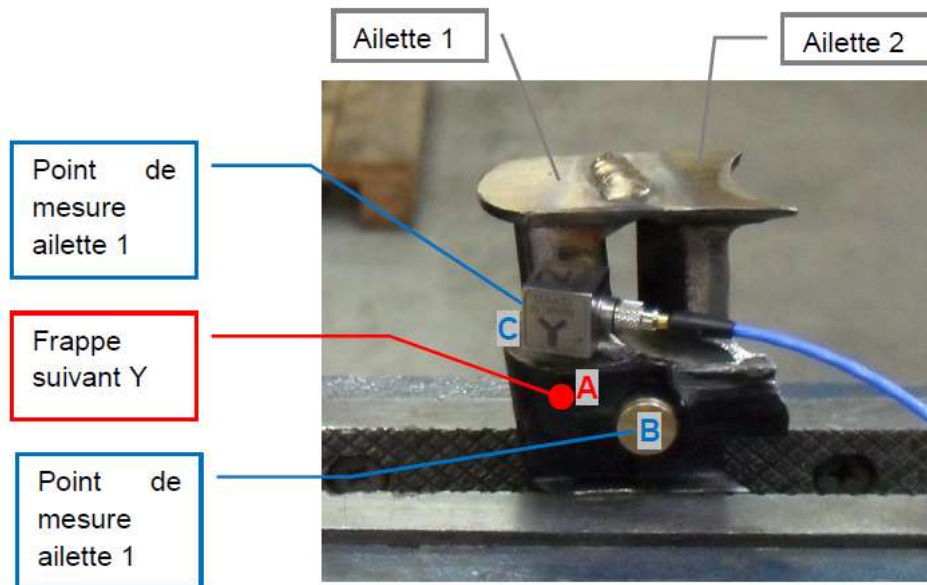
➤ Ce mode peut être comparé au mode expérimentale à 328 Hz, correspondant à un mouvement d'écartement des ailettes.



5. études de cas analyse expérimentales & modèles numériques

□ Cas de 2 ailettes soudées au chapeau (Blocage pied)

≈ Configuration d'origine des ailettes dans la rainure, occasionnant des casses

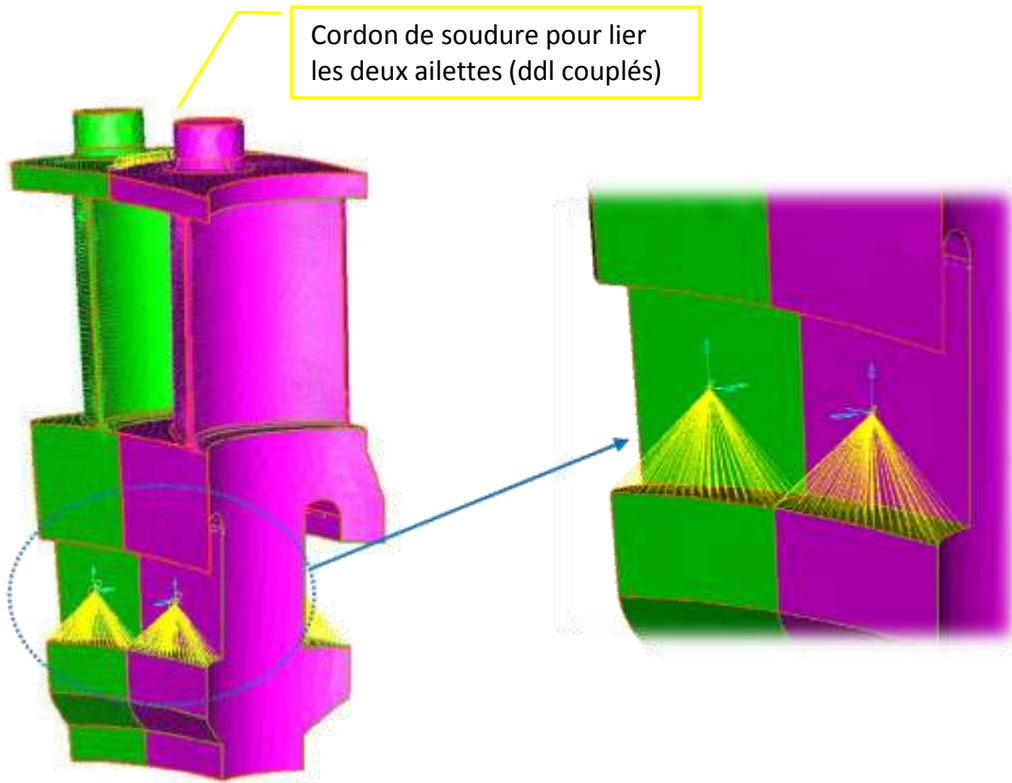


Les fréquences propres relevées sur le couple d'ailettes sont fortement influencées par le serrage et la position des ailettes dans l'étau.

5. études de cas analyse expérimentales & modèles numériques

□ Cas de 2 ailettes soudées au chapeau (C.L libre)

Modèle FEM : 2 Ailettes soudées au chapeau

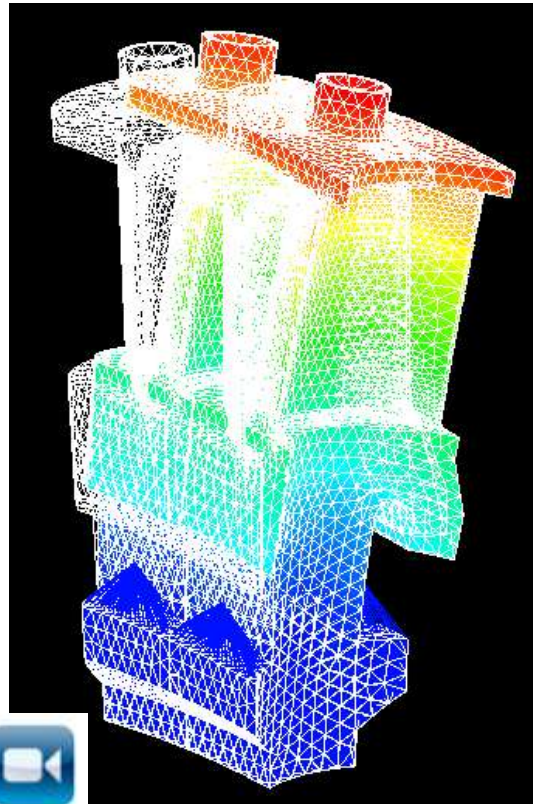


5. études de cas analyse expérimentales & modèles numériques

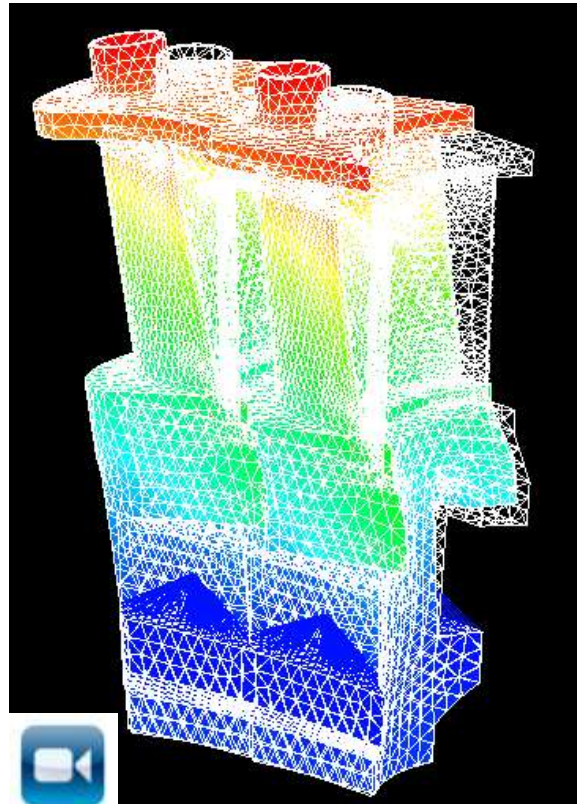
□ Cas de 2 ailettes soudées au chapeau (C.L libre)

Modèle FEM : Déformées modales calculées

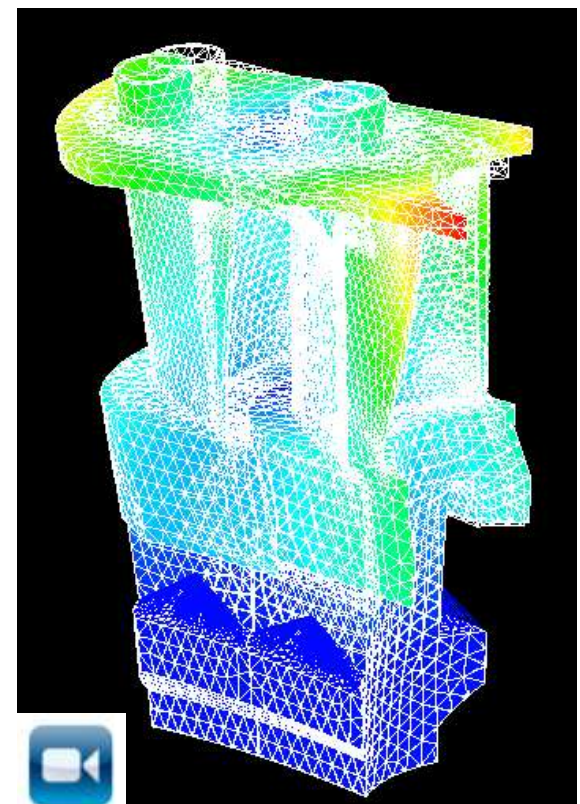
Mode n°1: 2640 HZ



Mode n°2: 3480 HZ



Mode n°3: 5400 HZ



5. études de cas analyse expérimentales & modèles numériques

□ Analyse cinématique de la Turbine

vitesse de rotation arbre turbine :	7000	tr/min
Fréquence de rotation F_0 :	116.7	Hz
Harmonique 2 ($2 \times F_0$) :	233.3	Hz
Harmonique 3 ($3 \times F_0$) :	350	Hz
Harmonique 4 ($4 \times F_0$) :	466.7	Hz

Nombre ailettes roue 1 :	86	
Fréquence de passage des ailettes roue 1 :	10033.3	Hz
Nombre ailettes roue 2 :	124	
Fréquence de passage des ailettes roue 2 :	14466.7	Hz
Nombre ailettes roue 3 :	124	
Fréquence de passage des ailettes roue 3 :	14466.7	Hz
Nombre ailettes roue 4 :	123	
Fréquence de passage des ailettes roue 4 :	14350.0	Hz
Nombre ailettes roue 5 :	86	
Fréquence de passage des ailettes roue 5 :	10033.3	Hz

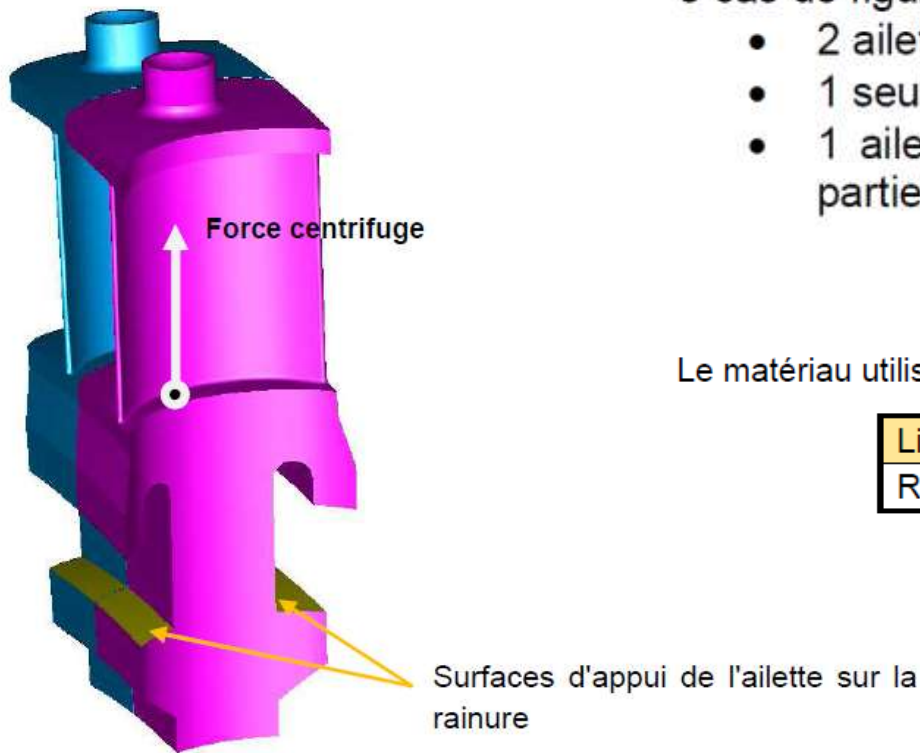
Pas de coïncidence fréquentielle entre les fréquences cinématiques de la turbine et les fréquences propres des ailettes.

⇒ **Etude statique des ailettes.**

Calcul des contraintes pour différents scénarios de placement des ailettes dans la rainure.

5. études de cas analyse expérimentales & modèles numériques

□ Etude statique des ailettes



3 cas de figure sont envisagés dans le modèle:

- 2 ailettes parfaitement positionnées;
- 1 seule ailette parfaitement positionnée;
- 1 ailette parfaitement positionnée, l'autre partiellement.

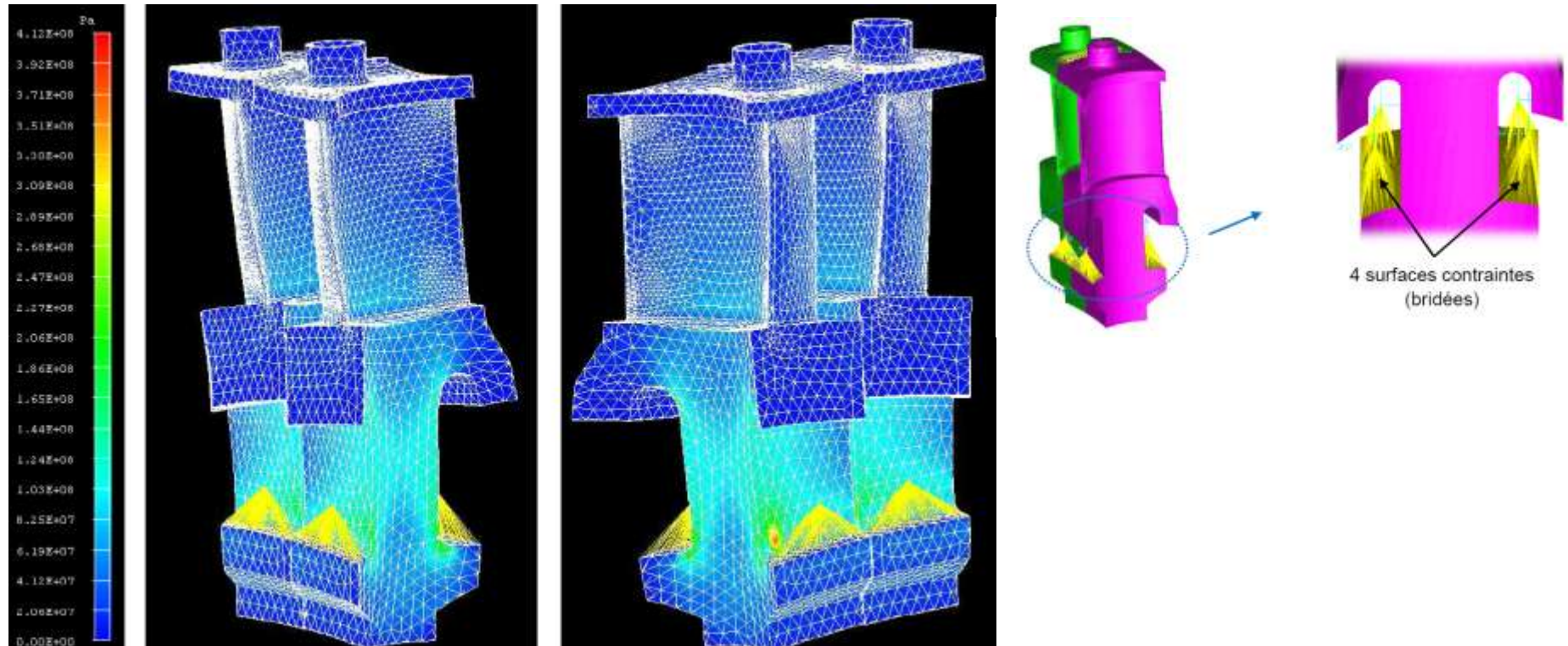
Le matériau utilisé pour la conception des ailettes est de l'acier X12Cr13.

Limite élastique	$\geq 552 \text{ N/mm}^2$ ($552 \cdot 10^6 \text{ Pa}$)
Rupture	$\geq 690 \text{ N/mm}^2$ ($690 \cdot 10^6 \text{ Pa}$)

5. études de cas analyse expérimentales & modèles numériques

□ Etude statique des ailettes

➤ 2 ailettes parfaitement positionnées dans la rainure



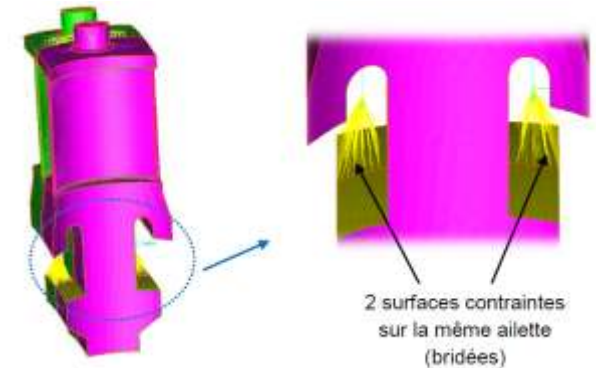
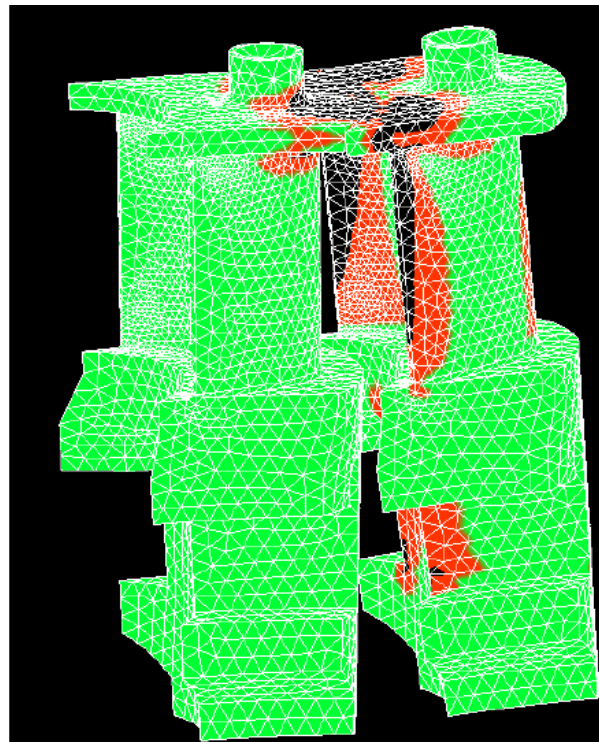
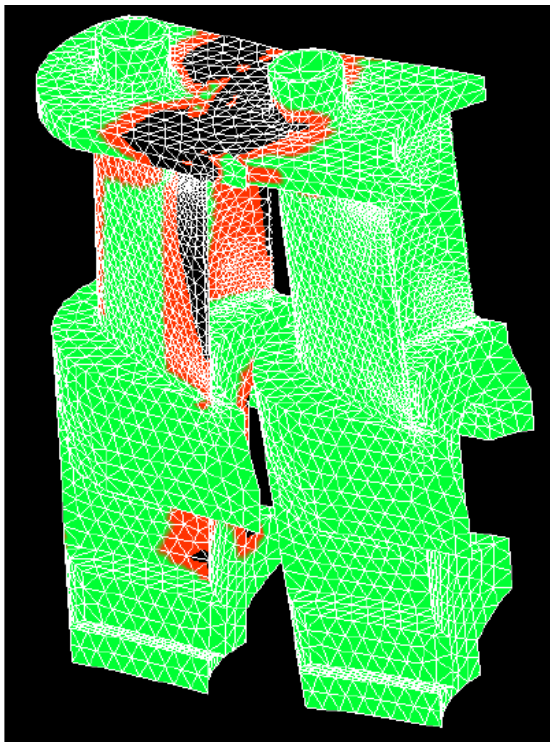
La contrainte de Von Mises σ_{VM} atteint un maximum de 412 MPa.

$$\sigma_{VM} < R_E = 552 \text{ MPa}$$

5. études de cas analyse expérimentales & modèles numériques

❑ Etude statique des ailettes

- 1 seule ailette parfaitement positionnées dans la rainure



- : Contrainte < 550 MPa
- : Contrainte > 550 MPa
- : Contrainte > 1 GPa

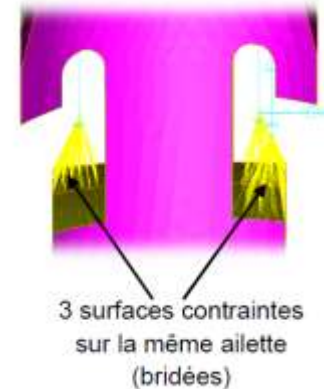
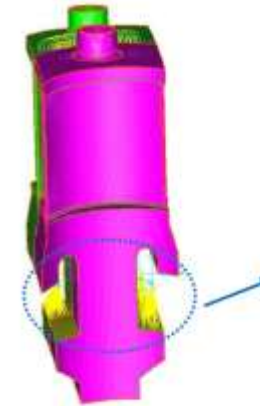
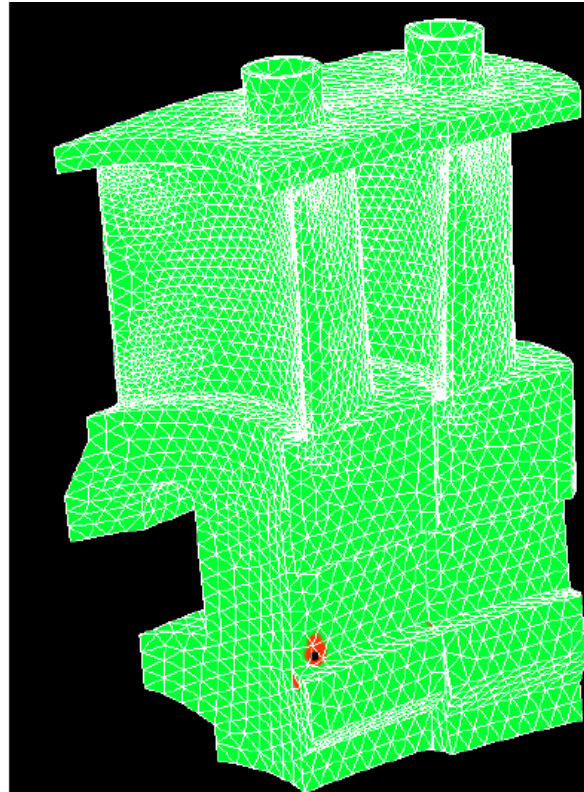
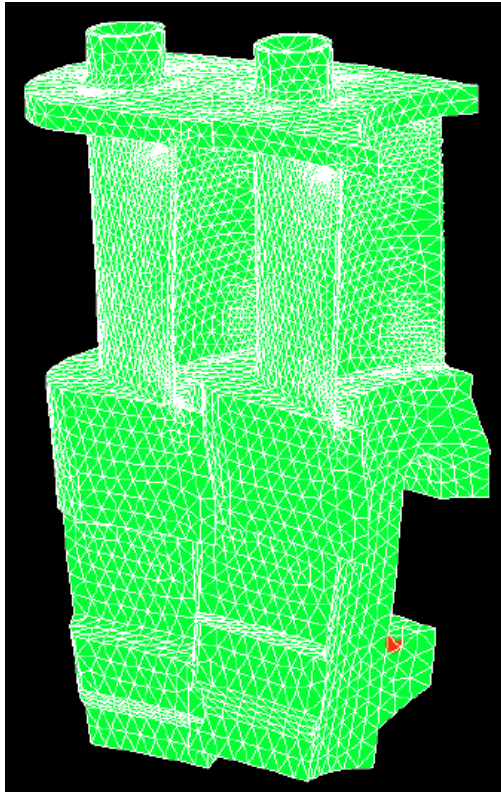
$$\sigma_{VM} > R_E = 552 \text{ MPa}$$

=> Casse du cordon de soudure au chapeau

5. études de cas analyse expérimentales & modèles numériques

□ Etude statique des ailettes

➤ 1 seule ailette parfaitement positionnées dans la rainure, l'autre partiellement



■ : Contrainte < 550 MPa

■ : Contrainte > 550 MPa

■ : Contrainte > 1 GPa

$\sigma_{VM} > R_E = 552 \text{ MPa}$

=> Casse sur le pied de l'ailette

5. études de cas analyse expérimentales & modèles numériques

Etude d'un démarreur:

Contexte de l'étude:

Une gêne sonore a été mise en évidence sur des démarreurs, sur une fréquence bien définie. L'objectif de cette étude est de proposer un modèle Vibro-Acoustique du démarreur à l'aide de la méthode FEM afin de définir et simuler des actions de réduction du bruit.

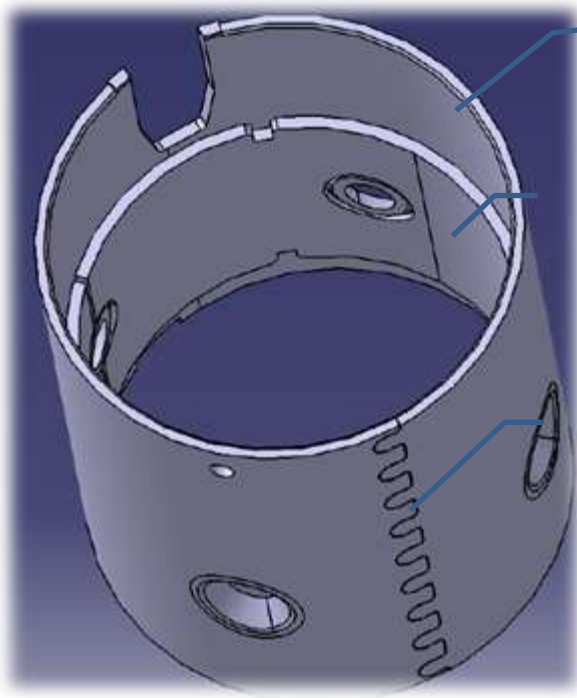
Cette étude passe nécessairement par l'établissement d'un modèle structurel du cylindre. Cela nécessite de définir les propriétés physiques du modèle (module d'Young, coefficient de poisson, masse volumique, conditions aux limites,...) qui doivent être idéalement recalées sur des mesures expérimentales.

Par la suite, la base modale calculée sur ce cylindre sera importée dans un modèle vibro-acoustique afin d'évaluer le rayonnement acoustique du démarreur sous différentes excitations (source acoustique interne au démarreur, forces mécaniques sur les pôles,...).

5. Etudes de cas: Analyses modales expérimentales & Modèles numériques

Etudes proposées:

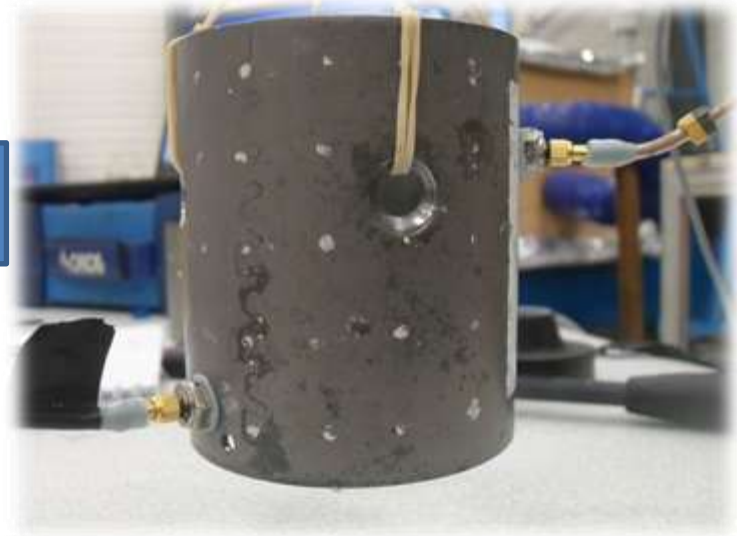
Analyse modale expérimentale + modèle FEM



Cylindre

Virole
(plaquée sur le cylindre)

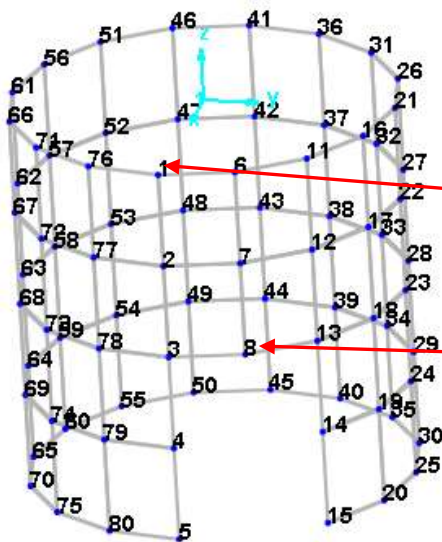
Couture
Jonction du cylindre



5. études de cas analyse expérimentales & modèles numériques

Analyse modale expérimentale

Maillage du modèle d'analyse modale :



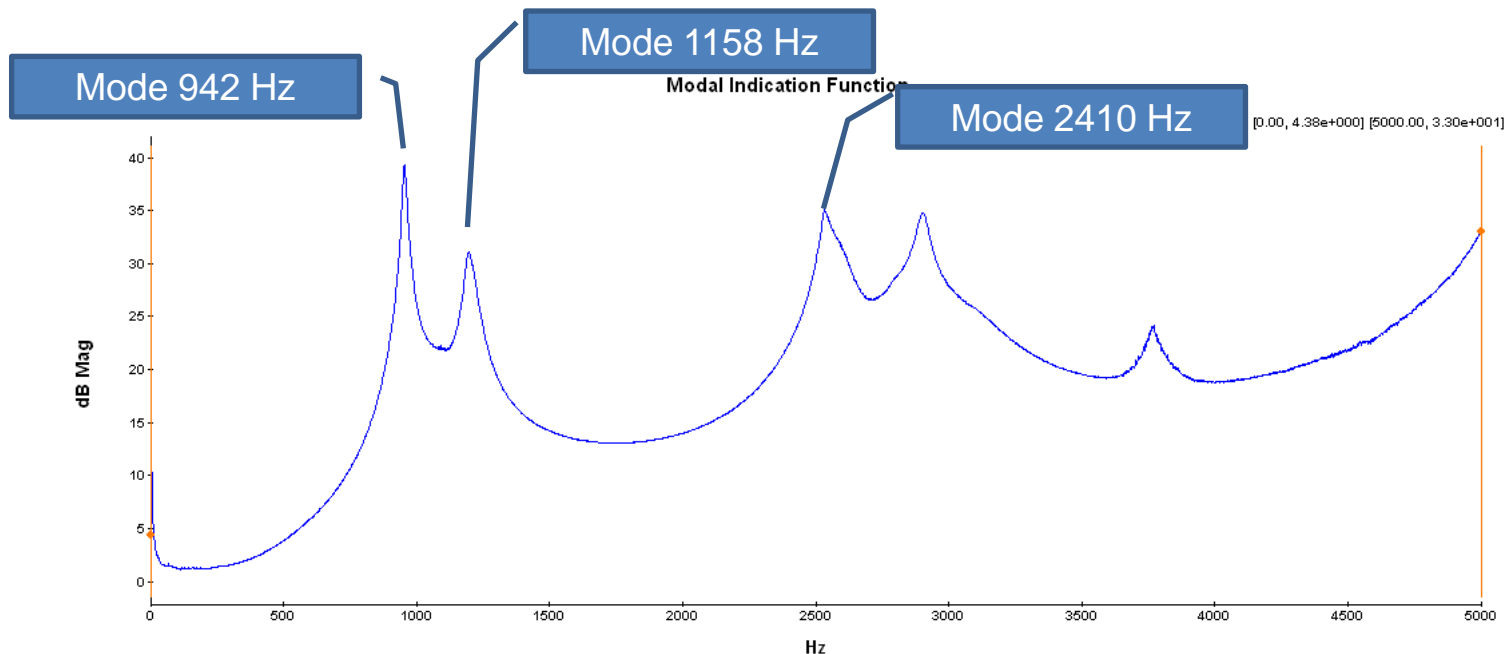
✓ 2 points de mesures
(n°1 et n°8)

✓ Déplacement de la frappe sur
l'ensemble des points du maillage

5. études de cas analyse expérimentales & modèles numériques

Analyse modale expérimentale

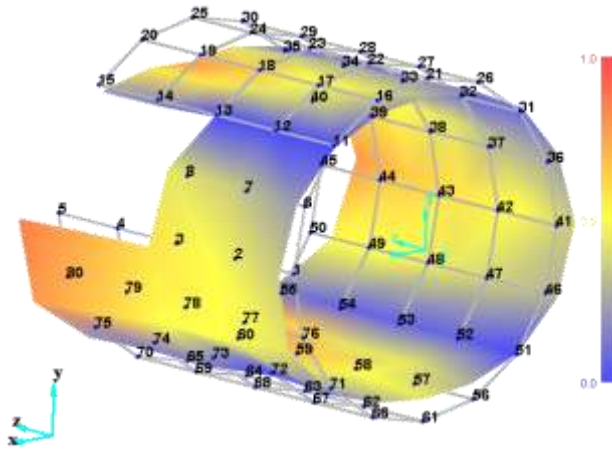
Cylindre suspendu (libre-libre) : Fonction d'indication modale



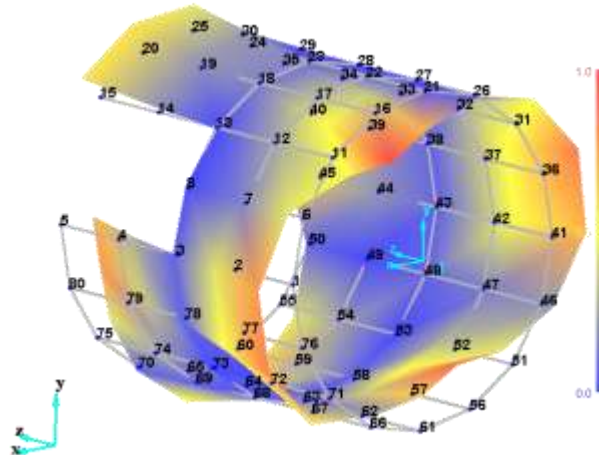
5. études de cas analyse expérimentales & modèles numériques

Analyse modale expérimentale

Mode 2 lobes
(942 Hz)



Mode 2 lobes
en opposition de phase
(1159 Hz)



Mode 3 lobes
face encoche
(2410 Hz)

